目　录

緒　論

§1　自然数集与数論函数

在递归函数論中，我們只以自然数(正整数及零)作为討論的对象．为什么要作这个限制呢？作了这个限制以后会不会使递归函数論的应用范圍大大縮小呢？我們先来解决这两个疑問．

递归函数論所使用的主要方法(即下文的摹状式及递归式)是从自然数集的研究而产生的，直到目前为止，它只能使用到自然数集去；即使推广，但推广后的集合本质上仍和自然数集相同．因此，最好把討論自始至終限于自然数集，以省却許多麻煩．这便是把討論对象限于自然数集的主要原因．

作了这个限制后，递归函数論的应用范圍会不会大大縮小呢？不会的！这可以从下列几点看出来：

第一，有了自然数以后，

整数可以看作自然数对，如 $+3=(3,\ 0)$，$-3=(0,\ 3)$；

有理数可以看作自然数的三元矢，如

$$+\frac{1}{2}=(1,\ 0,\ 2),\quad -\frac{1}{2}=(0,\ 1,\ 2);$$

实部虛部为有理数的复数可以看作自然数的六元矢，如

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i=(1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 3);$$

实数可以看作自然数叙列；

复数可以看作自然数叙列对(或看作一种特殊的自然数叙列)．

要把实数看作自然数叙列，可以采用下法：把每一实数先写成整数加正小数之形，再把小数部分展成二进制小数(有穷二进小数

可化成 111… 形)，这时，用叙列的首两項表示該实数的整数部分，第三項表示小数点与“1”之間“0”的个数，从第四項起，叙列的每項表示相邻两个“1”之間“0”的个数．例如，对于实数 $-2.2492=-3+0.7508$，把其正小数部分展成二进制便可写成

$$-3+0.110000000011010001\cdots,$$

故这实数可用自然数叙列

$$0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 1,\ 3,\ \cdots$$

来表示；反之，自然数叙列

$$0,\ 2,\ 1,\ 4,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 0,\ 1,\ \cdots$$

便表示下列的实数：

$$-2+0.0100001100100011101\cdots$$

写成十进制便是 $-2+0.2735\cdots$

这样一来，通常在数学中所討論的各种数，都可表成自然数組(自然数有限叙列)或自然数(无穷)叙列．这是一点也不足怪的，因为人們对各种数的认識，正是由自然数出发，一步一步地深入后才认識的．至于由实数或复数出发，进一步討論矢量、矩陣、超复数系等等，其推广过程更属显而易見．它們之可以化归到自然数序列(有穷或无穷)更是明显的事了．因此，即使递归函数論仅限于討論自然数集，但这一点也不妨碍它将来应用到数学各方面中去．

其次，各学科的研究过程及其結果，往往都可用符号(而且是有限个符号)来表示的，一門学科发展越久越成熟，則它所使用的符号体系便越能表达該学科的主要內容．应用符号来表示时，虽可以有种种式样(如各符号之間有高有低、有大有小；符号的排列亦有直綫形、曲綫形、平面形乃至立体形等等)，但我們恒可以都改用直綫形(即各符号并列成一行的形状)来表示．这样，如把各基本符号看作字母(必为有限个，可設为 k 个)，把一行并列的字母看作“字”，那末，各学科研究过程、对象及其結果都可表成“字”．如果我

們把这 k 个字母看作 k 进制中的 k 个基本数字，而把每个"字"看作一个 k 进制数字．这样，任何"字"便对应于一个自然数．既然各科的研究过程及結果可用"字"来表示，那末也就可以用自然数来表示了．由此看来，即使我們把研究范圍限于自然数，一点也不会影响遞归函数論应用范圍的广泛性．

这里必須强調指出，我們絕对沒有輕視有理数以及实数，并沒有抹煞它們的独立性及其重要性，也沒有說在任何情况下均必須把有理数、实数、复数等依上述方式化归为自然数后才容許討論．我們只是說，由于遞归函数論所使用的方法本质上最适用于自然数．因而，对遞归函数論說来，最好只限于自然数，然后通过上述方法把遞归函数論应用到有理数以及实数諸方面去．如果在别門学科（比如数学分析）中需要而且可以直接討論有理数及实数，那末当然可以直接討論而无須先化归为自然数．即使在遞归函数論中，有时也可以直接討論有理数及实数的，这时我們也毫不迟疑地从事直接討論，不过，遞归函数論本质上是限于自然数的．

凡以自然数集为定义域及值域的函数叫做**数論函数**．遞归函数論所討論的数既限于自然数，它所討論的函数也就限于数論函数了．因此，下文的所謂"数"便专指自然数，所謂"函数"便专指数論函数．至于推广函数"值域"为有理数或实数或复数，固未尝不可，但使用的方法与本书的方法相距太远，故我們不作这类推广．

习　　題

1．試述"十进"小数与"二进"小数互化的法則，并将下列各数由一种进位制表示化为另一种进位制表示：

$$0.7182;\quad 0.1416;\quad 0.100111;\quad 0.00001.$$

2．試将下数列所表示的实数求出（誤差不超过 10^{-4}）：

(1) $0,3,0,1,0,4,1,0,8,9,\cdots;$

(2) $5,0,40,1,0,\cdots.$

§2 函数与依变元

通常数学书中所說的“函数”，实际上兼指两个截然不同的概念，一是依变元(或因变元)，又一是由自变元而求依变元的“运算”．通常的数学书中对函数所下的定义是：

“若指定变元 x 的任何一个确定的值，相应地变元 y 便有确定的値，則变元 x 就叫做自变元，而变元 y 就叫做变元 x 的函数”．

照这里所定义的“函数”，便相应于上述第一个概念——依变元．但是，通常书里又有“反函数”的定义：

“若将 y 考慮作自变元，将 x 考慮作函数（卽依变元），則由关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做已知函数 $f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数”．

照字面解釋，这个定义是很模糊的(初学者感到难懂也就在于此)，因为把 x 考慮作依变元从而确定一函数（依变元）$\varphi(y)$，这 $\varphi(y)$ 不正是 x 嗎？我們只能說 x（卽 $\varphi(y)$）是 $f(x)$ 的“变元”，那能說 x 是 $f(x)$ 的“反函数”呢？若說“把变元 x 看作函数时，变元 x 便是函数 $f(x)$ 的反函数”，这不更令人莫明其妙嗎？这样定义的反函数，不但无法理解，而且絕非通常所引进的“反函数”的概念．事实上，上面这句話应該这样来理解：“如果运算 f 为由 x 求 y 的运算，卽如果 $y=f(x)$，那末，由 y 求 x 的运算 φ（这时 $x=\varphi(y)$）便叫做运算 f 的反运算”．因此，在“反函数”概念中，所謂函数实指“运算”．如照通常书那样，把“函数”看作和“依变元”无別，那末“反函数”这名便很难理解了．反之，如果我們永远使用“反运算”一詞，則初学者必将容易理解得多．

“依变元”与“运算”旣为两个截然不同的概念，当然应該加以区分．在通常数学用語中，只有下列各情形是区别得很清楚的：

"加"(运算) 与 "和"(依变元)

"减"(运算) 与 "差"(依变元)

"乘"(运算) 与 "积"(依变元)

"除"(运算) 与 "商"(依变元)

至于"自乘"(运算)与"方幂"(依变元),"开方"(运算)与"方根"(依变元)已經有混用的現象. 自此以后,便不作区别了,不管"运算"或"依变元",都用同样的术語,使用同样的符号. 以致初学者常常难于区别.

最奇怪的是下面这种現象. 在高等数学中引进的符号都是就依变元而引进的,例如有关极限、积分的符号 $\left(\lim\limits_{x\to a}、\int dx\right)$ 等等,但求导数的符号却有两套:一套是专門对依变元使用的,如 $\dfrac{d}{dx}$、$\dfrac{\partial}{\partial x}$ 等,另一套是专門对函数关系使用的,如 "f'"、"f_1"、"f_2" 等(后两者通常写为 "f_x"、"f_y",这却既不是专对依变元使用,又不是专对函数关系使用,而是一种頗不合理的符号).但是,由于在高等数学中人們已經长期地把函数关系与依变元混用的緣故,竟然大量地出現把 $\dfrac{d}{dx}$ 对函数关系使用而把"$'$"对依变元使用的現象,例如下列的式子在高等数学书或論文中絕不是稀有的:

$$\frac{df}{dx},\ \frac{\partial f}{\partial x}\quad \left(\text{把}\ \frac{d}{dx}\ \text{等对函数关系使用}\right),$$

$$(x^2+2x)'\quad (\text{把“}'\text{”对依变元使用}),$$

这种情况充分反映了目前在数学中对"依变元"与"函数关系"这两概念的混淆程度.

为什么会发生这样的混淆呢? 对此作一些較詳細的探討.

設有函数关系 f(一元)、g(二元)、h(三元),如果在它們的变元处分别填以一些表示数量的式子(可为常数,可含有变元),所得的結果当然是一些表示数量的式子,叫做这些函数关系的**塡式**,也叫做这些函数关系当变元为这些数量时的**值**(尤其当塡以常数

时更是这样称呼). 例如

$$f(3),\quad g(2,\ 4),\quad h(3,\ 1,\ 0)$$

都是填式,它們都是各函数关系在相应变元处的值;如果所填的数量含有变元,則填式便是一些依变元,例如

$$f(3+x),\quad g(x^2,\ x+y),\quad h(0,\ x,\ 4+y)$$

便是一些依变元. 这些依变元当然与 f、g、h 有关,但由这些依变元并不能确定函数关系 f、g、h. 如果我們限定各变元处必須填以变元本身(不填以复杂的式子),而且不同变元处填以不同的变元(甚至要求:第一变元处填以 x_1, 第二变元处填以 x_2, …), 那末所得的填式(它們为依变元)便与原函数关系一一对应了, 因此这个填式便特称之为原函数关系的**命名式**. 例如

$$f(x_1),\quad g(x_1,\ x_2),\quad h(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

便分别是函数关系 f、g、h 的命名式.

如果我們經常使用依变元,那末給出一函数关系后,我們永可改用它的命名式(这是依变元), 这很容易作到; 反之, 如果我們經常使用函数关系,那末給出一依变元后,我們如想作出表示相应的函数关系的符号却不是很容易作到的. 例如, 与下列依变元相应的函数关系的符号却未曾作出:

$$x^2+2x+3,\quad g(x^2y,\ x+y).$$

要作出相应的函数关系的符号,只能采用下法: 命

$$f(x)=x^2+2x+3,\quad \tilde{g}(x,\ y)=g(x^2y,\ x+y).$$

这样才能勉强得出表示相应函数关系的临时符号(f 及 $\tilde{g}$).

举例来說,如果我們使用 $\frac{d}{dx}$、$\frac{\partial}{\partial x}$(它們是对依变元使用的), 要表示上两式的导数可立即写成

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+3),\quad \frac{\partial}{\partial x}g(x^2y,\ x+y).$$

但如果使用“$'$”及“f_1”等符号,我們必須依上法引入 f 及 $\tilde{g}$ 后才能使用,即

$$f'(x), \quad \tilde{g}_1(x, y)$$

表示上两式的导数. 两相比較，自然以作用于依变元的符号更便于运用.

因此，在数学中几乎完全使用依变元而很少使用函数关系. 即使創造了好些表示函数关系的符号（如 sin、log 等），但使用时永远只使用它們的命名式（如 $\sin x$、$\log x$ 等），从未单独使用过 sin、log 这些符号（直到現在，恐怕还有人錯誤地认为：只有 $\sin x$、$\log x$ 才有意义，而 sin 与 log 是沒有意义的！）. 如果眞的有人认为 sin、log 等只是沒有意义的符号，那末在数学界有函数关系与依变元相混淆的現象便更是不足怪了.

但是，只要讀者注意一下便可看到，$f(x, y)$一般有两种意义，其一是指 f 的某个值（未定値），亦即 f 在 (x, y) 处的值，这是将 $f(x, y)$ 作为依变元而使用的，作这用法时在"$f(x, y)$"之前可添入"値"一字，对其中的变元可作代入；另一是指作为 x、y 的函数 $f(x,y)$，这时 $f(x, y)$ 是作为命名式而使用的，这时即使把 $f(x, y)$ 改为 f 仍然可以. 如果这时并未突出函数关系 f（例如，如果"$f(x, y)$"为"x^2+2x+y"），那末总可在它前面加上"函数"或加上"(x, y)的函数"字样，对其中的变元絕不可作代入. 試看下列各例：

(1) $(x^2+x)^2$ 大于 100. 旣可說"値 $(x^2+x)^2$ 大于 100"，又可作代入得"$(20^2+20)^2$ 大于 100"，故指依变元.

(2) $(x^2+x)^2$ 为四次多項式. 这里如对 x 作代入則意义全不同了，故指运算（說得詳細些应是：相应于 $(x^2+x)^2$ 的函数关系是四次多項式）.

(3) 加法服从交換律、結合律. 这时"加法"当然指"运算"；通常又說：函数 $x+y$ 服从交換律、結合律，但絕不能說"値 $x+y$ 服从交換律".

(4) 两正数的和必大于該两数. 这里"和"显然指依变元，我們

絕不能說，“两正数的加大于該两数”，即使說“两正数相加”，也必須說“其和大于該两数”（因只能比較依变元与自变元的大小，不能比較函数关系与自变元的大小）.

通过以上各例，讀者可以明白依变元与函数关系的区别了.

当然，如果引入足够的函数关系符号，那末使用命名式来代替函数关系的方法是可以避免的. 例如，对上面所列举的例子(2)、(3)，可有三种方法引入相应的函数关系. 第一，我們可說：

(2) 命 $f(x)=(x^2+x)^2$，則 f 是四次多項式.

(3) “+”服从交換律（亦即加法服从交換律）.

第二，亦可仿数理邏輯中那样，引入記号“λ”，用“$\lambda x f(x)$”表示“由 x 而計算 $f(x)$ 的函数关系”，因此可以說

(2) $\lambda x(x^2+x)^2$ 为四次多項式.

(3) $\lambda xy(x+y)$ 服从交換律.

但这两种方法，終究沒有使用命名式那么方便（这也是数学中习惯于使用命名式的原因）. 第三种方法見 §4 末段（第 16 頁）.

数理邏輯中常常强調函数关系的重要性，认为在通常数学书中，大量使用依变元符号而少引入函数关系的符号、大量就依变元討論而少就函数关系来討論，这是一种不够理想的現象. 但作者认为，为便于初学者理解，以及使用方便起見，使用依变元均比使用函数关系要适当一些. 因此，本书中仍然主要是使用依变元的符号、就依变元（函数）而討論. 但是讀者必須牢記，在所使用的依变元中，有些是指未定値（这是眞正的依变元的用法），有些是指命名式（这实际上是指运算了），必須把两者严格分清. 只有在能够严格分清后，我們才可以从通常的使用方式中获到好处而避免其缺点.

习 題

在下列各語句中，哪些含 x 的式子是指的依变元？哪些則指的运算（函数

关系)?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$; 当 $|r|<1$ 时是收敛的,当 $|r|\geqslant 1$ 时是发散的.
2. 当 $|r|<1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ 的值为 $\frac{1}{1-r}$.
3. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是对 n 递增的; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是递增函数.
4. 因为 n^2+1 是递增函数,故 n^2+1 永大于 0.

§3 可直接定义的函数

定义一函数可有两种办法:直接法及派生法. 本节中討論直接法.

直接法又可分成三种:表列法、图示法及直接給出运算法則法.

第一, 表列法. 这便是一一地列出自变元的值与相应的依变元的值,写成一表,用这表来确定該函数. 当自变元的变值只有有限多个时,表列法行得通,也最为直捷;但当自变元有无限多个变值时,这方法便行不通了. 本书所討論的函数旣以自然数集为其定义域,故本法是行不通的.

第二, 图示法. 把自变元的变值作为横坐标,依变元的相应的值作为纵坐标,参照坐标系确定一点;把这样所得的一切点均繪出,得到一图;用这图来确定該函数. 这便是图示法. 当自变元的变域及函数的值域有界时,这方法是行得通的(但当变域是到处稠密时,这方法只能給出近似值而不能給出精确的值);当自变元的变域或函数的值域无界时,这方法便行不通. 本书所討論的变域旣为自然数集,故本法仍行不通.

第三, 直接給出运算法則法. 这便是直接說出当給定自变元的变值时如何求出依变元的相应值的方法. 例如,对下列各函数便可使用这方法而定义:

(1) $\boldsymbol{I}x=x$(么函数):函数的值与自变元的相同.

(2) $\boldsymbol{I}_{mn}(x_1, \cdots, x_m)=x_n$ (广义么函数):函数的值与第 n 个

变元的値相同($1\leqslant n\leqslant m$).

(3) $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x})=0$ (零函数):函数之値永为0.

(4) $C_a(\boldsymbol{x})=a$ (常值函数):函数之値永为 a.

(5) $$\boldsymbol{xNy}=\begin{cases}x, & 当\ y=0\ 时,\\ 0, & 当\ y\neq 0\ 时.\end{cases}$$

(6) $$\mathrm{eq}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}0, & 当\ x=y\ 时,\\ 1, & 当\ x\neq y\ 时.\end{cases}$$

以上六函数(其实(1)为(2)的特例,(3)为(4)的特例,故实际上只四种)都是无須“計算”便可求其値的.

如果讀者知道自然数之間的大小关系,那末还可定义下列函数:

(7) $\mathbf{max}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$: 其値为 x, y 中之大者.

(8) $\mathbf{min}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$: 其値为 x, y 中之小者.

如果讀者更知道自然数的大小次序,誰是誰的“后继数”,誰是誰的“直接前驅”,那末还可定义:

(9) $\boldsymbol{Sx}$ (后继函数): 其値为 x 的后继数,通常表为

$$Sx=x+1.$$

(10) $\boldsymbol{Dx}$ (前驅函数): 其値为 x 的直接前驅,即

$$Dx=\begin{cases}x-1, & 当\ x\neq 0\ 时,\\ 0, & 当\ x=0\ 时.\end{cases}$$

此外,还有若干个函数是可以直接定义的,这里也就不多説了. 但是总可相信,直接給出运算法則的方法只能对极簡单的函数才能使用,絕不能大規模地使用. 因此,要能源源地造出新函数,便必須使用另一办法——派生法. 这将在下节討論.

习 題

1. 已知如何把一数用十进制来表示. 試直接定义下列各函数的运算法則:

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$;

(2) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$;

(3) $\left[\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right]$ $\left(x\text{除以}y\text{之商,并約定}\left[\frac{x}{0}\right]=0\right)$;

(4) $\mathbf{rs}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (x 除以 y 的剩余,并約定 $\mathrm{rs}\,(x, 0)=x$);

(5) $\boldsymbol{x} \dot{-} \boldsymbol{y}$ (从 x、y 中大者减去小者所得之差);

(6) $\boldsymbol{x} \dot{-} \boldsymbol{y}$ (如果 $x \geqslant y$, 它指通常的 $x-y$, 如果 $x<y$, 它指 0).

2. 已知如何把一数用其质因子分解式来表示,試利用 $\mathbf{ep}_a\boldsymbol{x}$($x$ 的质因子分解式中第 a 个质数的幂指数)而定义下列各函数的运算法則:

(1) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$;

(2) $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{y}}$ (約定 $0^0=1$);

(3) $\mathbf{dv}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (x、y 的最大公約数,但 x、y 有一为 0 时其值为另一数);

(4) $\mathbf{lm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (x、y 的最小正公倍数,但 $xy=0$ 时其值为 0).

注意: 这里及本节中所引入的函数都是今后常使用的,应該熟記它們.

§4 迭　　置

上节已經看到,能够直接給出运算法則的函数只有寥寥几个.要能够源源得出新函数必須使用派生法, 卽由旧函数而造新函数的方法. 在派生法中,我們又可分成两大类:**迭置法**与**算子法**.

如果新函数在某变元組处的值只与各旧函数在某一变元組处的值有关,那末該新函数便是使用迭置法而造成的;如果新函数在某变元組处的值与各旧函数在某些变元組处的值有关(变元組的个数一般还不是固定的, 随新函数的变元的不同而也有所不同),那末該新函数便是使用算子法而造成的.

現在先討論迭置法.

数学中經常使用显式定义(又名組成复合函数法),例如

$$\mathrm{tg}\, x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

便是关于 $\mathrm{tg}\, x$ 的显式定义. 如果认为, 显式定义只是一种縮写,可有可无;只要我們不怕麻煩,显式定义可根本不用. 这种說法是

不对的．显式定义实际上分两步，第一步是迭置（或所謂复合），由 y/x、$\sin x$ 及 $\cos x$ 迭置而得 $\sin x/\cos x$，第二步是縮写，把 $\sin x/\cos x$ 縮写为 $\operatorname{tg} x$．第二步的确可有可无，但第一步却是必不可少的．因为迭置所得的函数 $\sin x/\cos x$，其性质与原有的三个函数 y/x、$\sin x$、$\cos x$ 截然不同．即使把原有三个函数的性质都完全弄懂了，也仍然不能說对新函数 $\sin x/\cos x$ 有足够的认識．应該把 $\sin x/\cos x$ 看作是一个道道地地的新函数，与迭置以前的原有三个函数是迥不相同的．这样看来，迭置必不可少，从而显式定义也必不可少．同时也可看出，迭置应該是显式定义的主要內容（因第二步可有可无）．今后便把"显式定义法"与"迭置法"看作是相同的方法，并統称为**迭置法**（在其他书上也叫做复合法、代入法等等）．

迭置法是有各式各样的，我們把它归納成如下的标准形状——**(m, n) 迭置法**．

定义 由旧函数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $g_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1, \cdots, m)$ 而造新函数

$$h(x_1, \cdots, x_n)=f(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$

的方法，叫做**对 f 及諸 g_i 作 (m, n) 迭置**，或簡称**f 对諸 g_i 作迭置**．如不明确說出 m、n 之值时，也可称之为**多多迭置**．这时，f 又称为**外函数**，而諸 g_i 称为**內函数**．

如果引入函数关系符号 f 及諸 g_i，則 (m, n) 迭置亦可表为（这方法今后也經常使用）：

$$h=f(g_1, \cdots, g_m),$$

从而

$$h(x_1, \cdots, x_n)=f(g_1, \cdots, g_m)(x_1, \cdots, x_n).$$

注意：在 (m, n) 迭置中，諸 g_i 的变元不但个数相同（同为 n），而且变元本身也須完全相同（同为 $x_1, \cdots, x_n$）．但是通常所使用的迭置法却不受这样的限制，因此便出現了各种不同面貌的

迭置．如引用广义么函数及常值函数，这些各式各样的迭置都可以看作 (m, n) 迭置的特例．下面举出最简单最常見的几种．

第一，一处代入(一处迭置)．它只对旧函数的一个变元作代入，对别的变元则不变．例如，

(1) 由 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $g(x_1, \cdots, x_s)$ (暂設 $s \geqslant m$)而作

$$h(x_1, \cdots, x_s) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, g(x_1, \cdots, x_s), x_{i+1}, \cdots, x_m).$$

当引用广义么函数后，它可看作(m, s)迭置：

$$h(x_1, \cdots, x_s)$$
$$= f(I_{s1}, \cdots, I_{s(i-1)}, g, I_{s(i+1)}, \cdots, I_{sm})(x_1, \cdots, x_s).$$

当然，通常作代入时，g 的变元未必包括尽了一切的 $x_1, \cdots, x_m$．这时便可利用下法而把它化归为(m, n)迭置．

(2) 由 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $g(y_1, \cdots, y_n)$而作

$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$$
$$= f(x_1, \cdots, x_{i-1}, g(y_1, \cdots, y_n), x_{i+1}, \cdots, x_m)$$

(这里假定諸 x_i 与諸 y_i 无一相同．如有相同的，則删去其重复的变元)．这时可先利用 $(n, m+n-1)$ 迭置而作出(下文暂用 r 記 $m+n-1$)：

$$g_1(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$$
$$= g(I_{rm}, \cdots, I_{r(m+n-1)})(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n),$$

于是再作

$$h = f(I_{r1}, \cdots, I_{r(i-1)}, g_1, I_{r(i+1)}, \cdots, I_{rm}).$$

如果在多处作迭置，而其中函数的变元不尽相同，則仍可仿上法化归．例如

(3) 由 $f(x_1, x_2, x_3)$、$g_1(x_4, x_2)$、$g_2(x_5, x_1)$而作

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(g_1(x_4, x_2), g_2(x_5, x_1), x_3).$$

仍可先作

$$\tilde{g}_1 = g_1(I_{54}, I_{52}),$$
$$\tilde{g}_2 = g_2(I_{55}, I_{51}),$$

再作

$$h=f(\tilde{g}_1,\ \tilde{g}_2,\ I_{53}).$$

第二，特化法．有时不是以函数代入而是用一些数目来代入的．例如：由 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 而造

$$h_1(x_2,\ x_3)=f(0,\ x_2,\ x_3),$$

$$h_2(x_2)=f(2,\ x_2,\ 3).$$

如果引用常值函数 $O(x)$、$C_2(x)$、$C_3(x)$，則这种迭置亦可化归为 $(m,\ n)$ 迭置，即先作一个二元零函数：

$$O_1(x_2,\ x_3)=OI_{21}(x_2,\ x_3),$$

則

$$h_1=f(OI_{21},\ I_{21},\ I_{22}),$$

$$h_2=f(C_2,\ I,\ C_3),$$

这便化归为 $(m,\ n)$ 迭置了．

由此可見，只要有了广义么函数及常值函数，則一切迭置都可化归为 $(m,\ n)$ 迭置．这便可以看出这两类函数的重要性了，因此，把广义么函数及常值函数合称**严格本原函数**．

順便指出，如果把 x_i 看作 n 个变元 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 的函数时，它便是广义么函数 I_{ni}；如果把常数 a 看作 x 的函数时，它便是常值函数 $C_a(x)$．同样，只要引入广义么函数及迭置，总可把少变元的函数（例如 m 元函数）看作多变元的函数（例如，看作 $m+n$ 元函数），因此严格本原函数的引入是非常自然的．反之，如果我們无条件地把少变元的函数（包括变元 x_i 本身）及常数都看作多变元的函数，那末严格本原函数便沒有引入的必要．

如果采用通常的看法而不引入严格本原函数时，各种迭置便不再能够化归为 $(m,\ n)$ 迭置．讀者容易驗証，各种迭置这时可化归为下列四种迭置：

(1) 一处复合．由 $f(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 及 $g(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 而作出

$h(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_m,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)$

$$=f(x_1, \cdots, x_{i-1}, g(y_1, \cdots, y_n), x_{i+1}, \cdots, x_m).$$

(2) 一处特化. 由 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 而作出

$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m)=f(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_m)$$

(这里 a 为一已給数値).

(3) 变元混同. 由 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 而作出

$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m)=f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_m).$$

(4) 变元对调. 由 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 而作出

$$h(x_1, \cdots, x_m)$$
$$=f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \cdots, x_m).$$

这样,討論时便較(m, n)迭置的討論要复杂些.

另外, 还有一种构造函数的方法, 表面看来与迭置截然不同, 通常也不把它叫做迭置,但实际上却完全可化归为迭置的,那便是所謂**凑合定义**(也叫做分别情形定义). 例如

$$h(x_1, \cdots, x_n)=\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n), & \text{当条件 } A_1(x_1, \cdots, x_n) \text{ 成立时}, \\ f_2(x_1, \cdots, x_n), & \text{当条件 } A_2(x_1, \cdots, x_n) \text{ 成立时}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f_k(x_1, \cdots, x_n), & \text{当条件 } A_k(x_1, \cdots, x_n) \text{ 成立时}. \end{cases}$$

这里必須要求諸条件 $A_1, \cdots, A_k$ 之間是互相穷尽且互不可兼的, 卽对任給的$(x_1, \cdots, x_n)$說来, 必有一条件且只有一条件 A_i 成立. 在以后将証明,不管条件 $A_1, \cdots, A_k$ 如何复杂, 总可以設法表成方程, 卽永可找到函数 $g_i(x_1, \cdots, x_n)$, 使

条件 $A_i(x_1, \cdots, x_n)$ 成立,当且仅当 $g_i(x_1, \cdots, x_n)=0$.

因此, 現在便可先行假定: "条件$A_i(x_1, \cdots, x_n)$成立"换为 "$g_i(x_1, \cdots, x_n)=0$".

欲把凑合定义化归为迭置,可利用在§3給出的 $\max(x, y)$ 及 xNy 两函数. 下面把

$$\max(\max(x, y), z) \quad \text{記为} \quad \max(x, y, z),$$

$$\max(\max(x, y, z), u) \quad \text{記为} \quad \max(x, y, z, u),$$

等等(这也是习惯的記法). 容易驗証,

$$h(x_1, \cdots, x_n) = \max(f_1(x_1, \cdots, x_n) N g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, \cdots, x_n) N g_k(x_1, \cdots, x_n)).$$

这样便証明了:有了 max 及 xNy 后,上面的凑合定义便可化归于迭置了.

迭置法是最簡单的造新函数方法,也是讀者最熟悉的方法. 因此,不但初学者容易忽略它,人們长久以来都忽略了它(例如,认为"显式定义不外是縮写"的人便是把迭置忽略了). 由上文的分析已可看到,迭置法有种种不同的面貌,要把它化归是幷非輕而易举的事,化归的結果也因是否引用严格本原函数而大不相同.

今后除慣用的約定(如先乘除及 N,后加减)外,我們均使用"左結合"約定(例如, $xNyNz$ 指 $(xNy)Nz$).

我們还想指出一点:在通常的数学书中,尽管对每个依变元都有一个公式表示,但对相应于依变元的函数关系,却未必有特殊的記号表示. 例如,相应于 $x+y$,我們有"+",相应于 $\log x$,我們有"log",但相应于 $\log x+\log y$ 的函数关系却沒有特殊的記号表示. 因此,要提到該函数关系时,或者即使用 $\log x+\log y$ (把它看作命名式),或者令 $f(x, y)=\log x+\log y$,从而相应的函数关系便用 f 表示. 足見,通常的数学书中的符号体系是很不完备的. 有些书中也把 m 元函数 f 与 m 个函数 g_i 的迭置結果記为 $f(g_1, \cdots, g_m)$,但因相应于上面的函数关系不能表成 $\log+\log$,故仍无法表示它. 如果应用广义么函数,那末对应于任何依变元的函数关系都有特殊的記号表示了. 例如,相应于 $\log x+\log y$ 的函数关系便是 $\log I_{21}+\log I_{22}$,这是因为:

$$(\log I_{21}+\log I_{22})(x, y) = \log I_{21}(x, y) + \log I_{22}(x, y) = \log x + \log y.$$

相应于别的依变元的函数关系亦可同法表示. 因此,严格說来,当提及函数关系时完全不必使用"令 $f(x, y)=\log x+\log y$"这类方

式,也完全不必使用命名式(它实质上还是依变元),命名式的使用实际上只是由于习惯的結果罢了.

习　題

1. 試証:如果不引入严格本原函数,一切迭置可化归为本节中所列出的四种特殊迭置(可証 (m, n) 迭置能够这样化归).

2. 試把下列迭置化归为 (m, n) 迭置(可使用严格本原函数)及化归为四种特殊迭置(不許用严格本原函数):

(1) $h(x_1, x_2, x_3)=f(x_2, g_1(x_1, x_3), 4, g_2(x_1))$;

(2) $h(x_1, x_2, x_3)=f(x_3, g_1(x_1, x_3), x_2, x_3)$.

3. 試直接給出下列函数的运算法則:

(1) $1\dot{-}x$;　　(2) $1Nx$;

并証 $1\dot{-}x=1Nx$ (以后簡記这函数为 Nx),

(3) N^2x;　　(4) $N^2\max(x, y)$;　　(5) $N^2\min(x, y)$;

并証 $N^2\max(x, y)=\max(N^2x, N^2y)$,

$N^2\min(x, y)=\min(N^2x, N^2y)$.

4. 驗証下列关系 ($[\alpha]$表示 α 的整数部分):

(1) $x\leqslant y$　当且仅当　$x\dot{-}y=0$;

(2) $x=y$　当且仅当　$x\ddot{-}y=0$;

(3) x 为平方数　当且仅当　$x\dot{-}[\sqrt{x}]^2=0$;

(4) x 为 y 的倍数　当且仅当　$\mathrm{rs}(x, y)=0$.

5. 試証: 由正文中的凑合定义所定义的函数 $h(x_1, \cdots, x_n)$ 亦可表成:

$$h=f_1Ng_1+f_2Ng_2+\cdots+f_kNg_k.$$

6. 試把下列的凑合定义化归为迭置:

(1) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} f_1(x_1), & \text{当 } x_1=x_2 \text{ 时}, \\ f_2(x_1), & \text{当 } x_1\neq x_2 \text{ 时}; \end{cases}$

(2) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} f_1(x_1, x_2), & \text{当 } x_1<x_2 \text{ 时}, \\ f_2(x_1, x_2), & \text{当 } x_1=x_2 \text{ 时}, \\ f_3(x_1, x_2), & \text{当 } x_1>x_2 \text{ 时}; \end{cases}$

(3) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} f_1(x_1), & \text{当 } x_1+x_2 \text{ 为偶数时}, \\ f_2(x_1, x_2), & \text{当 } x_1+x_2 \text{ 非偶数时}; \end{cases}$

(4) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} f(x_1), & \text{当 } x_1\geqslant x_2 \text{ 时}, \\ g(x_1, x_2), & \text{当 } x_1<x_2 \text{ 时}; \end{cases}$

(5) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} x_1-x_2, & \text{当 } x_1 \geqslant x_2 \text{ 时}, \\ x_2^2, & \text{此外}; \end{cases}$

(6) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} \left[\dfrac{x_1}{x_2}\right], & \text{当 } x_1 \text{ 为 } x_2 \text{ 的倍数时}, \\ g(x_2), & \text{此外}; \end{cases}$

(7) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} k, & \text{当 } x_1 \text{ 呈 } kx_2 \text{ 形时}, \\ g(x_2), & \text{当 } x_1 \text{ 不呈 } kx_2 \text{ 形时}; \end{cases}$

(8) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} [\sqrt{x_1}], & \text{当 } x \text{ 为平方数时}, \\ g(x_1, x_2), & \text{此外}; \end{cases}$

(9) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} k, & \text{当 } x_1 \text{ 呈 } k^2 \text{ 形时}, \\ g(x_1, x_2), & \text{当 } x_1 \text{ 非平方数时}; \end{cases}$

(10) $h(x_1, x_2)=\begin{cases} b, & \text{当 } x_1 \text{ 呈 } 10^b \text{ 形时}, \\ g(x_1, x_2), & \text{当 } x_1 \text{ 非 } 10 \text{ 的方幂时}. \end{cases}$

7. 如果各条件 A_i 不是互相穷尽的，或者各条件 A_i 不是互不可兼的，問这时凑合定义将如何修改并如何化归为迭置？

8. 驗証下列各公式：

(1) $xNx=0$, $xN^2x=x$, $xN^3y=xNy$, $0Nx=0$;

(2) $xNyNz=xNzNy$;

(3) $xN(zNy)Ny=xNzNy$;

(4) $xN^2(yNz)=xN^2yNz$;

(5) $xN(xN^2z)=xNz$;

(6) $xN(y+z)=xNyNz$;

(7) $xN(xNy)=xN^2y$, $NxN(xNy)=Nx$;

(8) $xNy=x\cdot(1\dot{-}y)=\left[\dfrac{x}{xy+1}\right]=\left[\dfrac{x}{1\dot{-}y}\right]$.

注意：(1)～(5)为有关 xNy 的最主要的公式，其余純含 xNy 函数的公式均可由它們推出(配合以 $xN0=x$ 及 $xNSy=0$)。

§5 算　子

第二种由旧函数而造新函数的方法(派生法)是使用算子．上节談到，使用算子法与使用迭置法不同之处在于：由迭置法所作的新函数，它在某变元組处之值只与各旧函数在某一变元組处之值有关；但由算子法所作出的新函数，它在某一变元組处之值却与各

旧函数在許多变元組处的值有关，一般說来，这些变元的个数还是可变的(即随新函数的变元而改变的).

当然，既然常数可看作函数的特例，那末，迭置也可以看作算子的特例. 但一般說来，把迭置包括在算子之中并沒有好处，因此，除特别声明，本书中所謂算子是不包括迭置在內的.

如果由某算子所作出的函数是常值函数(亦即該算子把若干旧函数变成数值)，則該算子称为**泛函**. 但在本书中很少使用"泛函"这名称，仍然通称为算子.

算子有好多种，今后将詳細討論它們. 現在只介紹最常用也最易理解的两种算子，讀者务須先熟悉它們. 这是因为，不仅它們的用处很大，而且熟悉它們以后对别的算子也就較易理解了. 这两种算子便是**原始复迭式**与**迭函算子**.

設有一个函数 $f(x)$，我們可依次作出下列各值:

$$f(x),\ f(f(x))\,(=f^2(x)),\ ff^2(x)\,(=f^3(x)),\ \cdots$$

一般(約定 $f^0(x)=x$)，

$$f(f^n(x))=f^{n+1}(x).$$

$f^n(x)$ 可以看作依赖于 n 及 x 的二元函数，設記之为 $g(n, x)$，即設

$$g(n, x)=f^n(x),$$

則称 $g(n, x)$ 是由 $f(x)$ 利用**原始复迭式**而作出的. 如果 $f(x)$ 是一个复杂的公式，例如設

$$f(x)=x^2+2x+2,$$

記:

$$f^n(x)=\underset{t\to(x,n)}{\text{itr}}\,f(t)=\underset{t\to(x,n)}{\text{itr}}\,(t^2+2t+2).$$

这里 t 叫做**作用变元**(又名**算子变元**)，n、x 叫做**新添变元**，x 特名**初值变元**，$f(t)$ 叫做**作用域**. 作用域中除却作用变元以外的其他变元(如果有的話)叫做**参数**.

必須注意:新函数不依赖于作用变元，而依赖于新添变元及参

数;反之,旧函数不依賴于新添变元,而依賴于作用变元及参数.

初学者总以为,新函数 $g(n, x)$ 是由旧函数 $f(x)$ 利用迭置而作出的,这是一个很錯誤的看法. 事实上,如果不把 n 当作变元,而把 n 固定,例如 $n=3$ 或 $n=a$ (在整个討論过程中它都固定不变),那末

$$g(3, x)=fff(x),$$
$$g(a, x)=\underbrace{ff\cdots f}_{a\text{个}}(x).$$

它們的确可以看作由 $f(x)$ 迭置 3 次或 a 次而得(因为 a 自始至終均固定不变, $g(a, x)$ 所依賴的旧函数的值的个数也是固定的),但当把 n 看作变元(即把 $g(n, x)$ 看作 n 与 x 的二元函数)时, $g(n,x)$ 所依賴的旧函数的值的个数(共依賴于 n 个)便是可变多个的,从而决不能說 $g(n, x)$ 是由 $f(x)$ 利用迭置而得,而只能說 $g(n, x)$ 是由 $f(x)$ 利用原始复迭式而得.

通常,有好些书引用下列的記号,即引入不标出(作用、新添)变元的算子 α (相当于我們的" $\underset{t\to(x,n)}{\text{itr}}$ ")而記为

$$g(n, x)=\alpha f(x).$$

从这記号看来,似乎 $g(n, x)$ 只依賴于 f 在 x 处的值"$f(x)$",但实际 $g(n, x)$ 却依賴于 n 个 f 值. 这种不够恰当的記号也常常使讀者发生上述的誤解.

原始复迭式的应用是很广泛的. 根据 §3 的习題,如果知道一数字的十进制表示法,那末可以直接給出加、乘等函数的运算法則,但这未免太受具体記数法的限制了. 如果利用原始复迭式,那末不必假定任何記数法,亦可以作出加法及乘法乃至乘方来:

$$x+y=S^y(x);$$
$$x\cdot y=\underset{t\to(0,y)}{\text{itr}}\{x+t\}$$

(設命 $f_x(t)=x+t$, 則:

$$x\cdot 0=f_x^0(0),$$

$$x\cdot 1=f_x^1(0)=x+0,$$
$$x\cdot 2=f_x^2(0)=f_xf_x0=x+(x+0),$$
$$x\cdot 3=f_x^3(0)=f_xf_xf_x0=x+(x+(x+0)),\text{ 等等});$$
$$x^y=\underset{t\to(1,y)}{\mathrm{itr}}\{x\cdot t\}$$

(因为,如命 $f_x(t)=x\cdot t$, 则 $x^0, x^1, x^2, x^3, \cdots$ 依次为 $f_x^0(1), f_x^1(1), f_xf_x(1), f_xf_xf_x(1), \cdots$).

因此,常見的这三个函数便很容易利用复迭式由 Sx 而逐步造出来. 从这里也可看出复迭式的作用.

現在再討論迭函算子.

設給出一个二元函数 $A(x,y)$, 例如 $x+y$, 或 $x\cdot y$, 或 $\max(x,y)$, 或 $\min(x,y)$ 等等; 再設有任意一个一元函数 $f(x)$. 这时利用所給的 $A(x,y)$ 及 $f(x)$ 而造出下列一个新函数:

$$g(0)=f(0),$$
$$g(1)=Ag(0)f(1)=Af(0)f(1),$$
$$g(2)=Ag(1)f(2)=A^2f(0)f(1)f(2),$$
$$g(3)=Ag(2)f(3)=A^3f(0)f(1)f(2)f(3),$$

一般

$$g(n+1)=Ag(n)f(n+1)=A^{n+1}f(0)f(1)\cdots f(n+1).$$

显然, $g(n)$ 是依賴于函数 $A(x,y)$ 及 $f(x)$ 的. 但在使用时一般总是固定 A 而把 $f(x)$ 看作被作用(被改造)的函数. 因此,我們引入記号

$$g(n)=\underset{x\to n}{A}f(x),$$

这里 x 为作用变元, 而 n 为新添变元, $f(x)$ 是(在作用域中)被作用的函数. 新函数(即 $g(n)$)依賴于新添变元(与作用变元无关), 旧函数 $f(x)$ 依賴于作用变元(与新添变元无关), "$\underset{x\to n}{A}$" 称为**迭函算子**,如更詳細些,则称之为**迭 A 算子**.

当 A 为各种給定的函数时,我們便得出各种迭 A 算子. 其中

最常用的有四种.

1. **迭加算子**(当 A 为加法时). 将"$\underset{t\to n}{+}$"改写为"$\sum\limits_{t\to n}$". 显見

$$\sum_{t\to n} f(t)=f(0)+\cdots+f(n) \text{ (即通常的 } \sum_{k=0}^{n} f(k)\text{)}.$$

2. **迭乘算子**(当 A 为乘法时). 将"$\underset{t\to n}{\times}$"改写为"$\prod\limits_{t\to n}$". 显見

$$\prod_{t\to n} f(t)=f(0)\cdot f(1)\cdots f(n) \text{ (即通常的 } \prod_{k=0}^{n} f(k)\text{)}.$$

3. **迭大算子**(当 A 为 max 时). 显見

$$\max_{t\to n} f(t)=\max(f(0),\ \cdots,\ f(n)) \text{ (即通常的 } \max_{0\leqslant k\leqslant n} f(k)\text{)}.$$

4. **迭小算子**(当 A 为 min 时). 显見

$$\min_{t\to n} f(t)=\min(f(0),\ \cdots,\ f(n)) \text{ (即通常的 } \min_{0\leqslant k\leqslant n} f(k)\text{)}.$$

可見,通常使用的沒有系統記法的这些算子,現在已很自然地納入迭函算子这一类之中了.

显然,新函数 $g(n)$ 是依賴于 $n+1$ 个旧函数的値 $(f(0),\ f(1),\ \cdots,\ f(n))$ 的. 旣然把 n 看作变元,这些值的个数便是可变多个的. 因此,新函数 $g(n)$ 决不能由旧函数作迭置而得,而只能由旧函数根据算子而得. 初学者往往以为"$\sum\limits_{t\to n} f(t)$"可由 $f(x)$ 及加法作迭置而得,这是錯誤的.

以上是关于迭函算子的討論. 最后,再就一般的算子略作討論.

設有一算子 α,它把 m 元函数 $f(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 改造成 n 元函数 $g(y_1,\ \cdots,\ y_n)$,那末可記为

$$g(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\underset{(x_1,\cdots,x_m)\to(y_1,\cdots,y_n)}{\alpha} f(x_1,\ \cdots,\ x_m).$$

亦可記为:

$$g(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\underset{(y_1,\cdots,y_n)\leftarrow(x_1,\cdots,x_m)}{\alpha} f(x_1,\ \cdots,\ x_m)$$

諸 x_i 叫做**作用变元**,諸 y_i 叫做**新添变元**,作用域 $f(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 中如果还含有別的变元,則叫做**参变元**,这时新函数 $g(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 也依賴于这些参变元.

新函数只依赖于新添变元及参变元，这两种变元合称**自由变元**．凡自由变元都可以代入(对参变元作代入时须受一定的限制)，但不能改名(改名即把某变元符号改为另一个变元符号)．新函数不依赖于作用变元，故作用变元又名**約束变元**，凡約束变元均不能代入而只能改名(把作用变元改名时也須受一定限制)．因此这两类变元的性质是大大不同的．

代入与改名时須受什么限制呢?

参变元与作用变元同时出現于作用域中，但两者的作用、两者的性质迥殊．因此有一个基本原则是：作用变元与参变元絕不能用相同的符号表示．凡違反这个原则的做法叫做**变元混乱**，应该看作是一个錯誤(不合法)的行为．

因此作出下列的限制：凡代入或改名时，都不能使得参变元与作用变元用相同的变元符号来表示，即必須防止变元混乱．

下面以例子来說明这个限制的意义．試討論算子 $\sum\limits_{t\to n}$，設它作用于 $f(u, t)$，即設

$$g(u, n)=\sum_{t\to n}f(u, t),$$

这里 t 是作用变元，n 是新添变元，而 u 是参变元．限制是：参变元与作用变元不能同名．

如果想对 t 改名，那末可改为 v (新变元)或改为 n (与新添变元同名)，但絕不能改为常数(例如 0)或任何复杂的式子(例如 $v+1$)，也不能改为 u (与参变元同名)，至于含 u 的复杂式子当然更不合法，即

$$g(u, n)=\sum_{v\to n}f(u, v), \quad g(u, n)=\sum_{n\to n}f(u, n)$$

是合法的，但

$$g(u, n)=\sum_{0\to n}f(u, 0), \quad g(u, n)=\sum_{v+1\to n}f(u, v+1),$$

$$g(u, n)=\sum_{u\to n}f(u, u),$$

等等都是謬誤的．

如果想对参变元 u 作代入，例如将 u 代入以0、将 u 代入以 n，将 u 代入以 n^2+4 等等，这都是可以的，这不致引起变元混乱，代入后便得：

$$g(0,\ n)=\sum_{t\to n}f(0,\ t),$$

$$g(n,\ n)=\sum_{t\to n}f(n,\ t),$$

$$g(n^2+4,\ n)=\sum_{t\to n}f(n^2+4,\ t).$$

但如果想对 u 代入以 t，或代入以含 t 的公式，如 t^2+4，却是不合法的，它将引起变元混乱，即：

$$g(t,\ n)=\sum_{t\to n}f(t,\ t),$$

$$g(t^2+4,\ n)=\sum_{t\to n}f(t^2+4,\ t)$$

都是对 u 的錯誤代入．如果由于問題需要，必須对 u 代入以 t 或代入以含 t 的公式，那末須先将作用变元 t 改名（例如改成 v）后，再作代入得

$$g(t,\ n)=\sum_{v\to n}f(t,\ v),$$

$$g(t^2+4,\ n)=\sum_{v\to n}f(t^2+4,\ v),$$

这才是正确的結果．

注意：对新添变元却可以按通常的办法代入而不致引起变元混乱，即对新添变元 n 可代以常数（例如0），复杂的式子（例如 m^2+2），也可代以 u（与参变元同名）或 t（与作用变元同名），或含 u 或 t 的复杂式子．即下列对 n 所作的各式代入都是合法的：

$$g(u,\ 0)=\sum_{t\to 0}f(u,\ t),$$

$$g(u,\ m^2+2)=\sum_{t\to m^2+2}f(u,\ t),$$

$$g(u,\ u)=\sum_{t\to u}f(u,\ t),$$

$$g(u,\ t)=\sum_{t\to t}f(u,\ t),$$

等等．

当作用变元与新添变元同名时，必須注意，这只是两种变元偶

尔"同名",实际上彼此性质絕异,不能看作是"同一"变元,也不能把两者"合并". 例如在下式中,

$$g(u,\ \underline{t})=\sum_{t\to\underline{t}}f(u,\ t)$$

有横綫的"$\underline{t}$"是新添变元,可作代入,而沒有横綫的"t"(共两处)是作用变元,絕不能代入. 如把两种 t"合并"为一,写成 $g(u,\ t)=\sum_t f(u,\ t)$,則对右端的 t 既不能改名也不能代入,这样是极不便于运用的. 但通常的数学书中却常常出現这类記号,例如导数的記号,既不用 $\underset{t\to x}{D}f(t)$,也不用 $\underset{x\to x}{D}f(x)$,而用 $D_x f(x)\left(\text{即}\dfrac{d}{dx}f(x)\right)$,这对初学者說来往往搞不清究竟先求导数还是先作代入;如果承认不能把作用变元与新添变元"合并",而把导数的記号写成 $\underset{t\to x}{D}f(t)$,則将对初学者方便不少.

习　題

1. 試求 $\sum\limits_{x\to 20}$、$\prod\limits_{x\to 20}$、$\max\limits_{x\to 20}$、$\min\limits_{x\to 20}$、$\underset{x\to(20,4)}{\text{itr}}$ 对下列函数作用的結果:

(1) $f(x)=x^2+x\dot{-}3$;

(2) $f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$;

(3) $f(x)=\left[\dfrac{x^2\dot{-}2}{x^2+3x-2}\right]$;

(4) $f(x)=(3x^2+2x-4)N(2x\dot{-}4)$.

2. 試証:

(1) $\sum\limits_{x\to n}f(x)=0$　当且仅当　$\max\limits_{x\to n}f(x)=0$;

(2) $\prod\limits_{x\to n}f(x)=0$　当且仅当　$\min\limits_{x\to n}f(x)=0$.

3. 試証:

(1) $\prod\limits_{x\to n}Nf(x)=\min\limits_{x\to n}Nf(x)$;

(2) $N^2\sum\limits_{x\to n}f(x)=\max\limits_{x\to n}N^2f(x)$;

(3) $\min\limits_{x\to n}f(x)=\max\limits_{x\to n}f(x)\dot{-}\max\limits_{x\to n}\left(\max\limits_{x\to n}f(x)\dot{-}f(x)\right)$.

4. 試証:如果 $A(x,\ y)$ 滿足交換律及結合律,則必有

$$\underset{x\to m}{A}\ \underset{y\to n}{A}\ f(x,\ y)=\underset{y\to n}{A}\ \underset{x\to m}{A}\ f(x,\ y).$$

(注意：本节所討論的四个迭函算子都有此性質.)

5. 試証：

(1) $\sum\limits_{x\to m} \max\limits_{y\to n} f(x, y) \geqslant \max\limits_{y\to n} \sum\limits_{x\to m} f(x, y)$;

(2) $\sum\limits_{x\to m} \min\limits_{y\to n} f(x, y) \leqslant \min\limits_{y\to n} \sum\limits_{x\to m} f(x, y)$;

(3) 只要 $A(x, y)$ 对 x 及对 y 均单調遞增，则将(1)、(2)中的“$\sum\limits_{x\to m}$”换为“$\underset{x\to m}{A}$”后仍成立.

6. 在下列各变换中，哪些是改名？哪些是代入？在各改名及代入中，哪些是合法的？哪些是不合法的？对不合法的改名或代入，試举出具体例子来說明左右两端不相等.

(1) 命 $f(u, y) = \sum\limits_{x\to y} (ux + (x \dot{-} u)(x+2))$，则

$$f(u, x) = \sum_{x\to x} (ux + (x \dot{-} u)(x+2)),$$

$$f(y, x) = \sum_{x\to x} (yx + (x \dot{-} y)(x+2)),$$

$$f(x, x) = \sum_{t\to x} (tx + (t \dot{-} x)(t+2)),$$

$$f(x, u) = \sum_{x\to u} (ux + (x \dot{-} u)(x+2)),$$

$$f(x, x+2) = \sum_{u\to x+2} (ux + (u \dot{-} x)(u+2));$$

(2) 命 $f(u, y) = \sum\limits_{x\to y} \prod\limits_{y\to x} (u+y)(2u+y)$，则

$$f(u, x) = \sum_{x\to x} \prod_{y\to x} (u+y)(2u+y),$$

$$f(u, u) = \sum_{x\to u} \prod_{y\to x} (u+y)(2u+y),$$

$$f(y, y) = \sum_{x\to y} \prod_{y\to x} (y+y)(2y+y),$$

$$f(y, y) = \sum_{y\to y} \prod_{x\to y} (y+x)(2y+x).$$

§6 函数的定义过程(組成过程)

上面已經說过，每一函数或者是直接定义的，或者是由旧函数利用迭置或算子而派生的，派生出的新函数又可以利用迭置或算子再派生出另一些新函数，这样逐次派生下去，便得出所研究的各种函数.

下面将研究一函数的**定义过程**（又名**組成过程**），即研究从直

接定义的函数出发,經过怎样的步驟后才把所討論函数作出来.

在討論函数的組成的时候,易見无須一定要从能直接定义的函数出发. 事实上,只須从能"容易"求出其值的函数出发也就够了. 比如,使用十进制記数法以后,加减乘除四种运算都是比較簡单的,大可采用它們作为开始函数. 此外,对我們来說,乘方函数(x^y)是較难求其值的(当 y 相当大时尤是如此),但如果有人认为求 x^y 的值的方法十分簡单,那末他亦可用 x^y 作为开始函数. 这样看来,开始函数是可以相当任意地选取的,无須什么条件的. 明白这点以后,可以引进下列的定义.

定义 如果能找出一系列的函数关系 $g_1, g_2, \cdots, g_n$,使得每个 g_i 都满足下列条件:它或者是函数关系 $A_1, \cdots, A_h$ 之一,或者是由前面的若干个 g 根据迭置而作出,或者是由前面若干个 g 根据算子 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 之一而作出;則說該叙列是最后一函数 g_n 的**組成过程**(或**定义过程**),更詳細些說,$g_1, g_2, \cdots, g_n$ 是由开始函数 $A_1, \cdots, A_h$ 出发利用迭置及算子 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 而作出 g_n 的組成过程(定义过程).

由这定义可見,只要 $i \leqslant n$,那末 $g_1, \cdots, g_i$ 同时也是 g_i 的組成过程.

例1 令 $A_1(x, y)=x+y$, $A_2(x, y)=x \cdot y$. 由 A_1、A_2 出发,利用迭置时,試求 $f(x, y)=((x+y)^2+y)^2$ 的組成过程.

〔解〕 由 A_1、A_2 出发,利用迭置时,其組成过程如下:

$g_1(x, y)=x+y$ (开始函数 A_1),

$g_2(x, y)=x \cdot y$ (开始函数 A_2),

$g_3(x, y)=y$ (严格本原函数 I_{22}),

$g_4(x, y)=(x+y)^2$ ($=g_2(g_1, g_1)$,使用(2, 2)迭置),

$g_5(x, y)=(x+y)^2+y$ ($=g_1(g_4, g_3)$,使用(2, 2)迭置),

$g_6(x, y)=((x+y)^2+y)^2$ ($=g_2(g_5, g_5)$,使用(2, 2)迭置).

因为 $g_6=f$,故 $g_1 \sim g_6$ 即为由 A_1、A_2 出发利用迭置时 f 的組成过

程(因为想把迭置化归为(2, 2)迭置, 故多用了严格本原函数 g_3, 如不化归为(2, 2)迭置, 则 I_{22} 是可以不用的).

讀者不要以为找組成过程是很容易的事. 找組成过程正和找"証明"一样, 一般説来是比較困难的. 上例所以那末容易是因为, 在 $f(x, y)$ 的表达式中实际上已經把"組成过程"告訴我們了. 如果不把 $f(x, y)$ 表达为 $((x+y)^2+y)^2$, 而改用别的方式表达, 那末要找上述組成过程便困难得多了. 同样, 要对 $((x+y)^2+y)^2$ 找别的方式的組成过程也較困难(如例 2).

例 2 設 $A_0(x)=Sx$, 从 $A_0(x)$ 出发, 利用迭置与原始复迭式时, 試求 $((x+y)^2+y)^2$ 的組成过程.

〔解〕 从 $A_0(x)$ 出发, 利用迭置及复迭式, 则

$$g_0(x)=Sx \qquad (\text{开始函数 } A_0(x)),$$

$$g_1(x, y)=x+y \qquad (=\underset{t\to(y,x)}{\text{itr}} S(t), \text{使用复迭式}),$$

$$g_2(x, y)=x\cdot y \qquad (=\underset{t\to(0,x)}{\text{itr}} (t+y), \text{使用复迭式}).$$

以后各步驟同前, 于是即得所求之組成过程.

例 3 試問: 由 $A_1(x, y)=x+y$, $A_2(x, y)=xNy$, $A_3(x)=\text{rs}(x, 2)$ 出发, 利用迭置, 能否作出 $\text{dv}(x, 2)$ 及 $\text{lm}(x, 2)$; 即 $\text{dv}(x, 2)$ 及 $\text{lm}(x, 2)$ 是否在由 A_1、A_2、A_3 利用迭置所得出的函数集中?

〔解〕 根据算术知識, 可知

$$\text{dv}(x, 2)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 奇数时, 即当 } \text{rs}(x, 2)=1 \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } x \text{ 偶数时, 即当 } \text{rs}(x, 2)=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此易得

$$\text{dv}(x, 2)=1+N\text{rs}(x, 2);$$

又

$$\text{lm}(x, 2)=\begin{cases}2x, & \text{当 } x \text{ 奇时, 即当 } \text{rs}(x, 2)=1 \text{ 时},\\ x, & \text{当 } x \text{ 偶时, 即当 } \text{rs}(x, 2)=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此易得

$$\mathrm{lm}(x, 2)=x+xN^2\mathrm{rs}(x, 2).$$

既得到了这两表达式,讀者即不难作出其組成过程,在此不贅述了(只須注意: $Nx=1Nx$ 可由 xNy 利用迭置而作出).

由这个例子可見,要找一函数的組成过程,除非該函数的表达式已經完全利用开始函数及相应算子表出,否則一般說来是相当困难的,須对开始函数及所討論的函数有透彻的认識才成.

下列两概念在今后也經常使用.

定义 設有一函数集 Δ,如果只要函数 $f_1, \cdots, f_h$ 在 Δ 中,則由 $f_1, \cdots, f_h$ 經过迭置而作成的函数亦在 Δ 中,那末称 Δ **对迭置是封閉的**;如果只要 $f_1, \cdots, f_h$ 在 Δ 中,則由 $f_1, \cdots, f_h$ 經过算子 α 所作成的函数亦在 Δ 中,則說 Δ **对算子 α 是封閉的**.

所謂"封閉"的意思,不外是說:当对 Δ 中的函数实施迭置或实施算子 α 时,所得的函数仍在 Δ 中.

习 题

1. 把正文中之 $\mathrm{dv}(x, 2)$ 及 $\mathrm{lm}(x, 2)$ 的組成过程詳細写出.

2. (1) 由 $A_1(x, y)=x+y$, $A_2(x, y)=xNy$, $A_3(x)=\mathrm{rs}(x, 3)$ 出发,利用迭置,能否定义出 $\mathrm{dv}(x, 3)$ 及 $\mathrm{lm}(x, 3)$? 如能,則把定义过程詳細写出;

(2) 同(1),但把"3"换为"5";

(3) 同(1),但把"3"换为质数"p".

3. (1) 同2(1),但把"3"换为"4";

(2) 同2(1),但把"3"换为"12";

(3) 同2(1),但把"3"换为預先指定的一数 c.

4. (1) 設 $A_1(x, y)=x+y$, $A_2(x, y)=xNy$, $A_3(x)=\mathrm{rs}(x, 2)$,

$$A_4(x)=\begin{cases} x-2, & \text{当 } x\geqslant 2 \text{ 且 } x \text{ 为偶时}, \\ g(x)\text{(任意)}, & \text{此外}, \end{cases}$$

由 A_1、A_2、A_3、A_4 出发,利用迭置能否作出函数 Dx? 如能,則作出其組成过程;

(2) 試由函数 $\mathrm{eq}(x, y)$ 出发利用迭置而作出函数 Nx.

5. 設由多元函数 $A_1, \cdots, A_k$ 等利用多多迭置可以造出一元函数 $f(x)$，試就 $f(x)$ 的組成过程而作归納，証明由諸 A_i 只用多1迭置亦可作出 $f(x)$.

*6. 試由 $A_1(x, y)$、$A_2(x)$ 利用迭置而作出 $x \dot{-} y$:

$$(1)\quad A_1(x, y)=\begin{cases} x-3y-3, & \text{当 } x\geqslant 3y+3 \text{ 时}, \\ 3x-y-1, & \text{当 } x\leqslant 3y+2 \text{ 且 } y\leqslant 3x-1 \text{ 时}, \\ 5x+y, & \text{当 } y\geqslant 3x \text{ 时}, \end{cases}$$

$$A_2(x)=2x;$$

$$(2)\quad A_1(x, y)=\begin{cases} y\dot{-}3x, & \text{当 } y+1>3x \text{ 时}, \\ 3y+2\dot{-}x, & \text{当 } 3y+3>x \text{ 且 } 3x\geqslant y+1 \text{ 时}, \\ x+5y+5, & \text{当 } x\geqslant 3y+3 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$A_2(x)=2x.$$

§7 謂詞与特征函数

在递归函数論中，除函数（依变元）和函数关系外，还經常要討論到含变元的語句及謂詞.

凡具眞假的語句（因此必須是直陈句）称为**命題**，如“3 大于 2”，“今天下雨”等都是命題. 但有时在直陈句中可以含有一些变元 x、y 等，这时便叫做**含变元的語句**. 例如，“x 大于 y”，“x 月 y 日下雨”等便是. 含变元的語句不能馬上判定其眞假，必須对其中所有变元均代以确定的具体值以后才能决定其眞假. 由此可見，含变元的語句和前述的依变元十分相似，它們的值都是随其中所含变元的决定而决定的，所不同的是含变元的語句只取“眞”、“假”两值罢了.

正如每一个依变元对应一个函数关系那样，每个含变元的語句亦对应于一个函数关系，这种函数关系称为**謂詞**. 例如，“x 大于 y”为一个含变元的語句，相应的“函数关系”是一个二元謂詞“大于”. 又如“x 是质数”为一个含变元的語句，相应的“函数关系”是一元謂詞“为质数”. 每个謂詞的值域只含“眞”、“假”两元

素，而定义域則是个体域（由自变元的变値所組成）．在遞归函数論中，所討論的謂詞大多是以自然数集为定义域，而以“眞”、“假”为値域的．这种謂詞特称之为**数論謂詞**，以后討論的謂詞也就限于数論謂詞．上面提到的“大于”、“为质数”两謂詞就属于这一类．

对应于每一个含 n 个变元的語句 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，均可定义一个 n 元数論函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 眞时 } \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0,$$

而

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 假时 } \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=1.$$

具此性质的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 便叫做**語句 $\boldsymbol{A(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$ 的特征函数**．

显然，每一語句均对应于一个也只一个特征函数．相应于語句 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的特征函数，将記为 $\mathrm{ct}\,A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．

显然，如果可以找到一个处处有定义的 n 元函数 g，使得

$$A(x_1, \cdots, x_n) \text{眞} \quad \text{当且仅当} \quad g(x_1, \cdots, x_n)=0,$$

那末 $N^2g(x_1, \cdots, x_n)$ 便是語句 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 的特征函数．即

$$\mathrm{ct}\,A(x_1, \cdots, x_n)=N^2g(x_1, \cdots, x_n).$$

因此，在后面当只找到具这样性质的 $g(x_1, \cdots, x_n)$ 时，也就认为已經找出所求的特征函数了．当然，严格說来，所求的特征函数应該是 $N^2g(x_1, \cdots, x_n)$．

由于对每一个謂詞 A 均有

$$A(x_1, \cdots, x_n) \text{ 成立} \quad \text{当且仅当} \quad \mathrm{ct}\,A(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0,$$

因此任何一个含变元的語句都和一个方程式等价．在§4討論函数的凑合定义时，曾假定所討論的“条件 A”可以换为方程式，这假定的根据便渊源于此．的确，有了特征函数以后，任意的条件均可代以一个相应的方程式，討論可以簡化不少．

今举一些含 x 的語句及其相应的特征函数如下：

語 句	特征函数
x 为 0	N^2x
x 异于 0	Nx
x 为偶数	$\mathrm{rs}(x, 2)$
x 为 3 的倍数	$N^2\mathrm{rs}(x, 3)$
x 为平方数	$N^2(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)$
x 等于 y	$N^2(x \dot{-}\dot{-} y)$
x 小于 y	$N^2((x+1)\dot{-}y)$ 或 $N^2[(x+1)/(y+1)]$
x 小于或等于 y	$N^2(x\dot{-}y)$ 或 $N^2[x/(y+1)]$
x 为 y 的倍数	$N^2\mathrm{rs}(x, y)$

特征函数的应用是很广泛的，在以后的討論中，讀者可处处見到其应用．現在提出一个問題：已知若干簡单語句的特征函数，如何去求出由这些簡单語句所組成的复合語句的特征函数？

由簡单語句而造复合語句，恰巧相当于由旧函数而造新函数，这相当于使用派生法．因此它也可以分成两大类，其一是相当于迭置的，其二是相当于算子的．

第一类造复合語句方法大体是：利用五个所謂眞值函数（即定义域和值域均为“眞”、“假”两值的函数，它們在日常用語和数理邏輯中有广泛的应用）将若干語句“联結”起来作出新語句．例如

$$\text{如果 } x \geqslant y \text{ 且 } y \geqslant z, \text{ 則 } x \geqslant z.$$

其中簡单語句为“$x \geqslant y$”、“$y \geqslant z$”及“$x \geqslant z$”；眞值函数为“且”及“如果…則…”．

虽然眞值函数有五种，但根据数理邏輯知識可以知道，只使用其中某两种也就可以表达一切眞值函数了．不过为了接近于直观，我們仍然使用五种．这五种眞值函数是（下文以 A, B 表示任意两个含变元的語句）：

1．**非**（記为“$\neg$”）：“非 A”眞，当且仅当“A”假；

2．**或**（記为“$\vee$”）：“A 或 B”眞，当且仅当 A、B 中至少有一为眞；

3. **且**(記为“$\wedge$”)：“A 且 B”眞，当且仅当 A、B 皆眞；

4. **如果…則…**(記为“$\supset$”)：“如果 A 則 B”眞，当且仅当不是同时有 A 眞且 B 假；

5. **等价于**(記为“$\equiv$”或“$\leftrightarrow$”)：“A 等价于 B”眞，当且仅当 A 与 B 同眞假.

定理 1 下列等式成立：

$$\mathrm{ct}\,\overline{A}=1-\mathrm{ct}\,A=N\mathrm{ct}\,A,$$

$$\mathrm{ct}(A\vee B)=\mathrm{ct}\,A\cdot\mathrm{ct}\,B=\min(\mathrm{ct}\,A,\ \mathrm{ct}\,B),$$

$$\mathrm{ct}(A\wedge B)=N^2(\mathrm{ct}\,A+\mathrm{ct}\,B)=\max(\mathrm{ct}\,A,\ \mathrm{ct}\,B),$$

$$\mathrm{ct}(A\supset B)=\mathrm{ct}\,B\cdot N\mathrm{ct}\,A,$$

$$\mathrm{ct}(A\equiv B)=\mathrm{ct}\,A\dot{-}\mathrm{ct}\,B.$$

証明 讀者試就 A、B 或眞或假的情形而驗証左右两端同时为 0 或同时为 1.

由本定理，对于由联結詞而造成的新語句，其特征函数可由原語句的特征函数和一些函数作迭置而得，此外不再使用别的算子. 因此，引入下列的定义及定理，这对今后的研究有着极大的作用.

定义 設有一函数集 $\varDelta$，如果只要謂詞 A、B 的特征函数在集 $\varDelta$ 中，那末由 A、B 經命題联結詞而作成的新謂詞的特征函数亦在集 $\varDelta$ 中，这时便称集 $\varDelta$ 对于命題联結詞是**封閉的**.

定理 2 对于一函数集 $\varDelta$，如果它对迭置封閉，并且含有下列函数組

(1) 含有函数 Nx、$x+y$；

(2) 含有函数 Nx、$x\cdot y$；

(3) 含有函数 xNy；

(4) 含有函数 $x\dot{-}y$；

(5) 含有函数 x^y (約定 $0^0=1$)

之一，那末它便对命題联結詞封閉.

讀者自証.

第二类(即相应于算子的)造新語句法,主要是使用两个量詞:$\forall x$(**全称量詞**)及$\exists x$(**存在量詞**),其中x叫做**量詞变元**.

$\forall xA(x)$ 表示:一切x均使$A(x)$成立.

$\exists xA(x)$ 表示:有x使$A(x)$成立.

如果多个量詞依次迭置,則可依次序讀之,例如:

$\forall x\exists y\forall zA(x, y, z)$ 为:

"对任何x均有y,使得对任何z,均使$A(x, y, z)$成立".

$\exists x\forall y\exists zA(x, y, z)$ 为:

"有x使得对任何y,均有z,使得$A(x, y, z)$成立".

通常关于极限的定义,便是(設ε, δ的变域为正实数)

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall h(0<|h|<\delta\cdot\supset|f(a+h)-l|<\varepsilon).$$

設以$\min_x f(x)$及$\max_x f(x)$分别表示当x遍历自然数而变化时$f(x)$所取的最小值及最大值,那末有

$$\mathrm{ct}\forall xA(x)=\max_x \mathrm{ct}\,A(x),$$

$$\mathrm{ct}\exists xA(x)=\min_x \mathrm{ct}\,A(x).$$

但是,即使对每个x均可求出$\mathrm{ct}\,A(x)$之值,但并不保証必可求出$\max_x \mathrm{ct}\,A(x)$及$\min_x \mathrm{ct}\,A(x)$之值. 以后将証$\max_x$及$\min_x$是非能行的算子(其定义見于第二章§3),不属我們的討論范圍. 这就意味着,利用我們所討論的算子,是不能把$\forall xA(x)$及$\exists xA(x)$的特征函数表出的.

但是,在許多情形下,全称量詞及存在量詞可用受限全称量詞及受限存在量詞来代替. 后者是$\forall_{x\to n}$及$\exists_{x\to n}$:

$\forall_{x\to n}A(x)$:对于0到n間的一切x,皆使$A(x)$成立;

$\exists_{x\to n}A(x)$:在0到n間至少有一个x,使得$A(x)$成立.

我們并认为:由此所得的新語句是以n为变元的語句.

用受限量詞以造新語句时,新語句的特征函数是可以定义出来的.

定理 3 有如下关系式成立:

$$\operatorname{ct}(\underset{x\to n}{\forall} A(x)) = \max_{x\to n} \operatorname{ct} A(x) = N^2 \sum_{x\to n} \operatorname{ct} A(x),$$

$$\operatorname{ct}(\underset{x\to n}{\exists} A(x)) = \min_{x\to n} \operatorname{ct} A(x) = N^2 \prod_{x\to n} \operatorname{ct} A(x).$$

讀者自証.

注意: 当然还可以写成:

$$\operatorname{ct} \underset{x\to n}{\forall} A(x) = N^2(\operatorname{ct} A(1) + \operatorname{ct} A(2) + \cdots + \operatorname{ct} A(n)),$$

$$\operatorname{ct} \underset{x\to n}{\exists} A(x) = \operatorname{ct} A(1) \cdot \operatorname{ct} A(2) \cdots \operatorname{ct} A(n).$$

但因这中間的"…"是代表可变多个项的, 因而不能看成迭置. 初学者常誤以为只用加法、乘法、N 以及 $A(x)$ 的特征函数, 便可利用迭置而表出 $\underset{x\to n}{\forall} A(x)$ 及 $\underset{x\to n}{\exists} A(x)$ 的特征函数, 由上面的討論可知, 迭函算子絕不能化归为迭置及函数, 可見这种想法是錯誤的. 应該說受限量詞的特征函数恒可通过 $A(x)$ 的特征函数和迭函算子而表出, 决不能說通过 $A(x)$ 的特征函数及若干已知函数經迭置而得到.

当多个受限量詞互相重迭时, 仍和上面的多个量詞情形一样, 依次由左而右讀之. 求其特征函数时, 也依次对照卽可. 例如:

$$\operatorname{ct} \underset{x\to n}{\forall} \underset{y\to m}{\exists} \underset{z\to l}{\forall} A(x, y, z) = \max_{x\to n} \min_{y\to m} \max_{z\to l} \operatorname{ct} A(x, y, z),$$

$$\operatorname{ct} \underset{x\to l}{\exists} \underset{y\to m}{\forall} \underset{z\to n}{\exists} A(x, y, z) = \min_{x\to l} \max_{y\to m} \min_{z\to n} \operatorname{ct} A(x, y, z).$$

定义 設有一函数集 Δ, 如果只要語句 $A(x)$ 的特征函数在集 Δ 中, 則 $\underset{x\to n}{\forall} A(x)$ 及 $\underset{x\to n}{\exists} A(x)$ 的特征函数也在 Δ 中, 那末就說 Δ 对受限量詞是 **封閉的**.

由此定义及上述定理 3 卽得:

定理 4 如果函数集 Δ 对算子 $\max\limits_{x\to n}$ 及 $\min\limits_{x\to n}$ 封閉, 則 Δ 对受限量詞是封閉的.

数学中常常限制变元的变化范圍, 例如用 m, n 表示自然数, 用 x, y, z 表示实数等等. 在递归函数論中, 虽則一开始便限于自然数集, 但在討論过程中也可能对变元的变域再进一步加以限制.

例如，只以偶数为变域或只以平方数为变域等等. 对于其变域被限制了的变元，无須引入新記号，只用下法表示便成了.

設限定 u 的变域为 S，且“$x\in S$”的特征函数为 $g(x)$，则

$$\forall uA(u) \quad \text{当且仅当} \quad \forall x(g(x)=0\cdot\supset A(x)),$$

$$\underset{u\to n}{\forall} A(u) \quad \text{当且仅当} \quad \underset{x\to n}{\forall} (g(x)=0\cdot\supset A(x)),$$

$$\exists uA(u) \quad \text{当且仅当} \quad \exists x(g(x)=0\wedge A(x)),$$

$$\underset{u\to n}{\exists} A(u) \quad \text{当且仅当} \quad \underset{x\to n}{\exists} (g(x)=0\wedge A(x)).$$

因此，我們約定，今后凡使用量詞(不管受限或否)时，量詞变元均以整个自然数集为其变域.

习 題

作出下列語句的特征函数：

1. 只要 $x>0$ 便有 $x^3>0$.
2. $3^n\geqslant n^3$ 当且仅当 $n\geqslant 3$.
3. n 为质数.
4. a 为 b、c 的公倍数；a 为 b、c 的最小公倍数.
5. a 为 b、c 的公約数；a 为 b、c 的最大公約数.
6. a、b 互质.
7. 除非 n 为质数，否則 m 不被 n 整除.
8. y 为 x 以后的第一个质数.
9. $f(n)$ 不能对一切小于 m 的 n 而取质数值，除非变元在 m 以下时 $f(n)$ 本身恒为常数.
10. 如果对 0 与 n 間一切 c，只要 $c>0$，便有 $a\leqslant b+c$，那末 $a\leqslant b$.
11. 如果存在这样的 c，使得 $c>0$、$c\leqslant n$ 且 $a\leqslant b+c$，那末 $a\leqslant b$.
12. 如 a、b、c、d 为平方数，則它們不作成一等差級数.
13. a、b、c、d 为平方数，且作成一等比級数.
14. 在 a、b 間一切 x 均使 $A(x)$ 成立.
15. 在 a、b 間至少有一 x 使 $A(x)$ 成立.
16. 如果 $A(x, y)$ 眞，則 $B(y, z)$ 眞，除非 $D(x, y, z)$ 成立.
17. 当 $A(x)$ 成立时，$B(y, z)$ 成立的必要充分条件是 $D(y, z)$ 成立.

§8 数学归納法

在递归函数論中，旣然几乎全是討論数論函数，因此，数学归納法显然起着很重要的作用. 关于数学归納法的詳細討論，要到原始递归函数处再給出. 現在不妨先从直覺方面略作討論；因为在未談到原始递归函数时，我們已将大量地使用到数学归納法了.

設想証明一个关于 n 的語句 $F(n)$. **数学归納法**可分两步.

第一步，須証：当 $n=0$ 时，待証語句为眞；卽須証 $F(0)$ 眞. 这步驟叫做**奠基**.

第二步，在一定的假設下，証明情形 $n+1$ 时待証語句为眞，卽証明 $F(n+1)$ 眞，这步驟叫做**归納**. 必須注意的是：不是无条件地証明 $F(n+1)$ 眞，而是"在一定的假設之下"的（如果能够无条件地証明 $F(n+1)$ 眞，那末这是分别情形的証明，而并不是眞正的数学归納法証明），这个假設今后叫做**归納假設**.

完成了这两步驟后，便說"依数学归納法，待証語句得証".

归納假設有各种各样形式，这将在原始递归函数处詳細討論（第四章第六节）. 但是，通常熟知的至少有三种，現在可以先行介紹.

第一种，在假設"$F(n)$ 眞"之下，去証明 $F(n+1)$ 眞. 这时"$F(n)$ 眞"这个假設叫做**简单归納假設**（亦簡称为归納假設）. 而这个証明便叫做**簡单归納証明**.

第二种，在假設"$F(0)$ 眞，$F(1)$ 眞，…，$F(n)$ 眞"之下去証明 $F(n+1)$ 眞. 这时"$F(0)$ 眞，$F(1)$ 眞，…，$F(n)$ 眞"这个假設便叫做**强归納假設**，而該証明便叫做**强归納証明**.

第三种，当待証語句还含有参数的时候，比如，待証語句为 $F(n, u)$. 則奠基是：$F(0, u)$ 对一切 u 眞. 在归納步驟中，假設"$F(n, u)$ 对一切 u 眞"，从而証明 $F(n+1, u)$ 亦眞. 这个"$F(n, u)$ 对一切 u 眞"的假設叫做**参变归納假設**. 而該証明，便叫**参变归

納証明.

現在，举几个数学归納法証明的例子（所証明的各公式很重要，今后亦常应用，須熟記之）：

例 1 求証 $2^x \geqslant x+1$.

証明 奠基： $2^0 \geqslant 0+1$，卽 $1 \geqslant 1$，故 $x=0$ 时定理成立.

归納：
$$
\begin{aligned}
2^{x+1} &= 2\cdot 2^x = 2^x + 2^x \\
&\geqslant (x+1)+(x+1) \qquad \text{(归納假設)} \\
&\geqslant (x+1)+1,
\end{aligned}
$$

故依数学归納法，本定理得証.

推論 1 $2^{x-1} \geqslant x$，

$2^x \geqslant 2x$.

推論 2 $2^{x+1} \geqslant x(x+1)$.

今后記第 k 个质数为 $P(k)$ 或 P_k. 由于用自然数来計数，故开首的质数（卽 2，注意：数学中并不把 1 列为质数）应是第 0 个质数，卽 P_0. 換言之，

$$P_0=2,\ P_1=3,\ P_2=5,\ P_3=7,\ P_4=11,\ \cdots$$

例 2 求証 $P_k \leqslant 2^{2^k}$.

証明 奠基： $P_0 \leqslant 2^{2^0}$，卽 $2 \leqslant 2^1$. 故 $k=0$ 时定理成立.

归納： 显然用 $P_0, P_1, \cdots, P_k$ 来除 $P_0P_1P_2\cdots P_k+1$ 时均余 1，絕不整除，故知 $P_0P_1\cdots P_k+1$ 的任一质因子必 $\geqslant P_{k+1}$，当然更有

$$
\begin{aligned}
P_{k+1} &\leqslant P_0P_1\cdots P_k+1 \\
&\leqslant 2^{2^0}2^{2^1}\cdots 2^{2^k}+1 \qquad \text{(强归納假設)} \\
&\leqslant 2^{2^0+2^1+\cdots+2^k}+1 \\
&= 2^{2^{k+1}-1}+1 = \frac{2^{2^{k+1}}+2}{2} \leqslant 2^{2^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

故依数学归納法，定理得証.

注意： 只要不怕麻煩，可用很初等的方法証明：

$$P_k \leqslant 2^k+1.$$

如果再允許使用略为高深一点的理論,还可証明:

恒有一数 c, 使得当 $k\geqslant 2$ 时有 $P_k\leqslant ck\ln k$.

注意:在使用"归納假設"时須防止无形中引入不相干的假設,否則会引起錯誤,讀者試指出下列"証明"的錯誤所在.

反例 任給 n 条直綫,証明(?)它們均重合成一条直綫!

証明 奠基: $n=1$ 时是显然成立的.

归納: 强归納假設为:"任何 1 条, 2 条, …, n 条直綫均重合为一条直綫". 令任給 $n+1$ 条直綫. 先把其中的 n 条重合为一条直綫,这条直綫与余下的那一条直綫又重合为一条直綫(据强归納假設, 因 $n=2$ 时亦眞), 于是, 任 $n+1$ 条直綫便重合成一条直綫了! 依数学归納法結論得証.

下面是参变归納証明的例子.

例 3 設 $f(0, n)=n+1$,

$$f(m+1, n)=f(m, n^2)\cdot f(m, 2mn),$$

求証 $f(m, n)$ 永大于 0.

証明 对 m 归納,把 n 看作参数.

奠基: $m=0$ 时有 $f(0, n)=n+1$, 故对任何 n 均大于 0.

归納: 当情形 $m+1$ 时,

$$f(m+1, n)=f(m, n^2)\cdot f(m, 2mn).$$

根据参变归納假設, 对任何数 X, $f(m, X)$ 均大于 0, 故知 $f(m+1, n)$ 永大于 0.

依数学归納法,定理得証.

注意: 这里不仅假設 $f(m, n)$ 大于 0, 亦不仅假設 $f(0, n)$, $f(1, n)$, …, $f(m, n)$ 大于 0, 而是假設对任何 X, $f(m, X)$ 大于 0. 所以这个参变归納証明与前两者均不相同.

还須注意, 有时不能直接用数学归納法来証明 $F(n)$, 而必須先把 $F(n)$ 中的 n "分家", 某些 n 改写为 u, 而某些 n 則照旧, 然后对 n 作归納. 証明完毕后,再令 $u=n$ 而得到証明. 这种方法可

叫做**拆裂法**．今举一例如下(这法今后亦常用,須善自体会之)．

例 4 求証 $n\geqslant 3$ 时 $n^{n+1}\geqslant(n+1)^n$.

对这公式，当 $n=3$ 时容易驗証其为眞．但要作归納証明，却是很难进行的，因为当 n 变成 $n+1$ 时，上式成为

$$(n+1)^{n+2}\geqslant(n+2)^{n+1}.$$

不管利用哪一种归納假設，均难于証明这个公式．为此，唯有用拆裂法．拆裂法有种种方式，比如可拆裂为：

$$u^{n+1}\geqslant(u+1)^n,\quad 或\quad n^{u+1}\geqslant(u+1)^n.$$

讀者可自行驗証，第一式很难使用归納法，而第二式虽則較易驗証(見本节习題第 7 題)，但仍不够簡单．最好的拆裂法是作如下拆裂：

求証 $u\geqslant n\geqslant 3$ 时，$nu^n\geqslant(u+1)^n$.

証明 奠基： $n=3$ 时，这时 $u\geqslant 3$，有

$$\begin{aligned}3u^3&=u^3+2u\cdot u^2\\&\geqslant u^3+6u^2\\&\geqslant u^3+3u^2+3u+1\quad(因\ u\geqslant 3\ 时有\ 3u^2\geqslant 3u+1)\\&\geqslant(u+1)^3,\end{aligned}$$

故奠基得証．

归納： 我們有

$$\begin{aligned}(n+1)u^{n+1}&=(n+1)u\cdot u^n\\&\geqslant(nu+u)u^n\\&\geqslant(nu+n)\cdot u^n\\&\geqslant n(u+1)u^n\\&\geqslant(u+1)(u+1)^n\qquad(归納假設)\\&=(u+1)^{n+1},\end{aligned}$$

故归納步驟得証．

依数学归納法，断言“$u\geqslant n\geqslant 3$ 时，$nu^n\geqslant(u+1)^n$”得証．

然后，令 $u=n$，即由本断言而得

$$n^{n+1}\geqslant(n+1)^n.$$

从而例 4 便得到了証明.

由上例可以看出拆裂法之必要，同时也应知道“拆裂”是沒有一定标准規則可循的．有些拆裂大大有助于命題的証明；有些拆裂則較困难；錯誤的拆裂甚至使命題不成立．因此，讀者应該多作练习，熟习这种証明方法．

习　題

試用数学归納法証明：

1．(1) $(3n+1)7^n-1$ 为 9 的倍数；

(2) $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ 为 17 的倍数.

2．(1) $2^x\geqslant 2x$；

(2) $2^{x+1}\geqslant x(x+1)$.

3．如果 $f(x+1)$ 恒 $>f(x)$，則 $f(y)\geqslant y$ 对任何 y 成立；又若 $f(0)>0$，$f(x+1)$ 恒 $>f(x)$，則 $f(y)>y$ 对任何 y 成立.

4．$n\neq 3$ 时，$2^n>n^2$.

5．$n\geqslant 2$ 时，$2^{2n}\geqslant 3^n\geqslant n\cdot 2^n\geqslant 2^{n+1}$.

6．$(1+x)^n\geqslant 1+nx$.

7．$d\geqslant n\geqslant 3$ 时，$n^{1+d}\geqslant n(1+d)^n\geqslant (2+d)^n\geqslant (1+d)^n$.

8．$2^{x^2-x}\geqslant x^x$，$2^x\geqslant x^2-x$，$2(x+1)^{x+1}\leqslant (x+2)^{x+1}$.

9．(1) $m\geqslant 3$ 时，$(2n+1)^m<2^m n(n+1)^{m-1}$，但当 $m=2$ 时不成立；

(2) $u\leqslant n$ 时有：

$$nu^n(u+2)^{n+2}<(n+1)(u+1)^{2n+2}.$$

10．(1) $n\geqslant 5$ 时，$\dfrac{(2n)!}{n!n!}<4^{n-1}$；

(2) $(n+1)!\leqslant 2^{n^2}$；

(3) $(2^n)!\geqslant (2^n)^n$，又当 $m\geqslant 2^n$ 时有 $m!\geqslant m^n$.

11．給出 c、d 后，試求出 a，使 $n\geqslant a$ 后有：

(1) $n^2\geqslant cn+d$；

(2) $n!\geqslant c^n$；

(3) $2n^c\geqslant (n+1)^c$；

(4) $2^n\geqslant n^c$.

12．$2^{a+b+c+2}>2^a+2^b+2^{b+c+1}$　(a、b、c 为正整数).

13. $2^{a_1+\cdots+a_n+n}>2^{a_1+1}+\cdots+2^{a_n+1}$ ($n\geqslant 1$, 諸 a_i 均为正整数).

*14. $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{(2n)!}{n!n!}\leqslant\frac{2^{2n}}{2n^a}$ $\left(a\leqslant\frac{1}{2}\text{ 而 } n \text{ 充分大, 或 } a\leqslant\frac{2}{5}\text{ 而 } n\geqslant 1\right)$.

*15. $\left(1+\frac{1}{u}\right)^n<\left(1+\frac{1}{u+1}\right)^{n+1}$; $\left(1+\frac{1}{u}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{u+1}\right)^{n+2}$.

一般, 如果 $hx\geqslant x^2$, 則 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+h}$ 遞減; 如 $hx\leqslant 0$, 則 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+h}$ 遞增.(均当 n 充分大时.)

*16. 如 $a\neq 1$, 則 $\frac{a^{2n+2}}{a(a^{2n}-1)}>\frac{n+1}{n}$.

*17. 試証 $\sum_{x}^{n} x^h$ 为 n 的 $k+1$ 次多項式,其系数为有理数(正的或負的).

---

* 第 14~17 題述及有理数,但仍可用归納法.

第一章　五 則 函 数

§1　五則函数(上)

在数学的研究中，下列五个函数起着重要的作用：

$$x+y\ (\text{和}),\quad x\dot{-}y\ (\text{算术差}),\quad x\cdot y\ (\text{积}),$$

$$\left[\frac{y}{x}\right]\ (\text{商}),\quad [\sqrt{x}]\ (\text{平方根整部}).$$

因此，这五个函数及由它們迭置而得的函数，特称之为**五則函数**.五則函数还包含有下列各函数：

$\mathbf{rs}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (**剩余**)：它指 $x\dot{-}y\cdot\left[\frac{x}{y}\right]$,

$\boldsymbol{x}\dot{=}\boldsymbol{y}$ (**絕对差**)：它指$(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$,

$\boldsymbol{x}^{a}$ (**方幂**)：它指 $x\cdot x\cdots x$(a 为定数)

(注意：当 y 作为变元时，x^y 不在五則函数之內)，

$\boldsymbol{Ex}$ (**平方剩余**)：它指 $x\dot{-}[\sqrt{x}]^2$,

$\boldsymbol{Dx}$ (**前驅函数**)：它指 $x\dot{-}1$,

$\boldsymbol{Nx}$：它指 $1\dot{-}x$,

$\boldsymbol{xNy}$：它指 $x\cdot(1\dot{-}y)$,

$\mathbf{max}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$：它指 $x+(y\dot{-}x)$,

$\mathbf{min}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$：它指 $x\dot{-}(x\dot{-}y)$.

因此，在緒論中引入的函数，几乎全都是五則函数(除却乘方函数 x^y 及第 n 个质数 P_n 等以外). 另外，还有三組函数 $T_a x$, $R_a x$ 及 $E_a x$ 亦是很重要的五則函数，由于它們不大为讀者所熟悉，在下一节将另行討論.

讀者虽則熟习加法与乘法，但对别的五則函数却比較陌生.

当然，給出具体数字后，讀者恒能計算每个五則函数之値，但关于含有变元的五則函数的推演（恒等变换），讀者还是不够熟悉的．为此，須对这些函数进行較深入的討論．

根据經驗，一切只含和、算术差、积的公式似乎都可以由下列八个公式根据恒等变换而推出(注意：我們是約定用左結合法的)：

(1) $x+0=x$,

(2) $x+y \dot{-} x=y$,

(3) $x+(y \dot{-} x)=y+(x \dot{-} y)\ (=\max(x, y))$,

(4) $x \dot{-} (y+z)=x \dot{-} z \dot{-} y$,

(以上四公式只含和、差两函数．)

(5) $1 \cdot x=x$,

(6) $x \dot{-} x \cdot x=0$,

(7) $x(yz)=(xy)z$　(即乘法結合律),

(8) $(x \dot{-} y) \cdot z=zx \dot{-} zy$.

当然，要由这四公式而純邏輯地推出一切只含和差积的公式，这是一件相当困难的事情．在习題中給出一些常用且重要的有关五則函数的公式，讀者不必由这里的公式純邏輯地推出它們，只須驗証它們成立便成了．

很多含有商与剩余的公式都由下列六个公式推出：

(9) $x=y\left[\frac{x}{y}\right]+\mathrm{rs}(x, y)$　$\left(\text{或改用 } y \cdot \left[\frac{x}{y}\right] \dot{-} x=0\right)$,

(10) $\left[\frac{x}{Sx}\right]=0$,

(11) $\mathrm{rs}(x, Sy) \dot{-} y=0$　$\left(\text{或改用 } x \dot{-} y \dot{-} Sy \cdot \left[\frac{x}{Sy}\right]=0\right)$,

(12) $\left[\frac{x}{y}\right] \dot{-} \left[\frac{x+z}{y}\right]=0$,

(13) $\left[\frac{x}{y+z}\right] \dot{-} \left[\frac{x}{y}\right]=0$,

(14) $\left[\frac{Sx\cdot y+z}{Sx}\right]=y+\left[\frac{z}{Sx}\right]$,

(15) $\left(S\left[\frac{x}{y}\right]\dot{-}\left[\frac{Sx}{y}\right]\right)N\left(Sx\dot{-}y\left[\frac{Sx}{y}\right]\right)=0$.

由这些公式推出的很重要一条公式是:

(*) 如果 $x=y\cdot z+w$ 而 $w<y$, 則必 $z=\left[\frac{x}{y}\right]$而 $w=\mathrm{rs}(x, y)$。

很多的含有$[\sqrt{x}]$的公式可由下列六个公式推出:

(16) $[\sqrt{x}]\dot{-}[\sqrt{x+y}]=0$,

(17) $[\sqrt{x}]^2\dot{-}x=0$,

(18) $Sx\dot{-}(S[\sqrt{x}])^2=0$,

(19) $[\sqrt{x^2}]=x$,

(20) $x=[\sqrt{x}]^2+Ex$,

(21) $[\sqrt{(x+y)^2+2x}]=x+y$.

由这些公式推出的一条重要公式是:

(**) 如果 $x=u^2+v$ 而 $v\leqslant 2u$, 則必 $u=[\sqrt{x}]$而 $v=Ex$.

此外,有关各函数的許多常用而重要的公式将見于习题中.

这里,特别提出一条定理. 这条定理曾被叫做**中国剩余定理**,但它应叫做**孙子定理**(孙子算經中首先提到它).

定理(孙子定理) 如果各 b_i 两两互素,而 $c_i<b_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 則下列联立方程組

$$\mathrm{rs}(x, b_i)=c_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

在区間$(0, b_1b_2\cdots b_n-1)$上必有一也只有一根, 其余的根則由这根加 $b_1b_2\cdots b_n$ 的倍数而得.

証明 暫把上述方程組記作下形:

$$\mathrm{rs}(x, (b_1, b_2, \cdots, b_n))=(c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

而把矢量$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$叫做由 x 所产生的剩余矢量.

(1) 試取該方程的任意两根 u、v, 則

由于 $\mathrm{rs}(u, b_i)=c_i$, 故 $u=b_ir_i+c_i$ (r_i 为商);

由于 $\mathrm{rs}(v, b_i)=c_i$， 故 $v=b_is_i+c_i$ （s_i 为商），

故 $u-v=b_i(r_i-s_i)$，即 $u-v$ 为 b_i 的倍数.

但因各 b_i 两两互素，故 $u-v$ 必为 $b_1b_2\cdots b_n$ 的倍数. 如果 $u>v$，则 u 必由 v 加 $b_1b_2\cdots b_n$ 的倍数而得. 当 v 在区間 $(0, b_1\cdots b_n-1)$ 上时，这便是孙子定理第二部分所断言的.

为了証明孙子定理的前半断言，我們注意：

(2) 每个 x 必产生一个也只一个剩余矢量；

(3) 由 (1) 可知，$(0, b_1b_2\cdots b_n-1)$ 上的不同的 x 必产生不同的剩余矢量，但这区間中共有 $b_1b_2\cdots b_n$ 个不同的 x，故这区間的 x 共产生 $b_1b_2\cdots b_n$ 个不同的剩余矢量；

(4) 由于剩余 c_i 必比除数 b_i 为小，故最多只有 $b_1b_2\cdots b_n$ 个可能的剩余矢量.

由(3)、(4)可知，在 $(0, b_1b_2\cdots b_n-1)$ 上的 x 全体已給出了一切可能的剩余矢量，即每一个剩余矢量均已由 $(0, b_1b_2\cdots b_n-1)$ 上的某个 x 所产生，亦只由这区間上的一个 x 所产生. 換句話說，原方程組必有一根也只有一根在区間 $(0, b_1b_2\cdots b_n-1)$ 上. 故孙子定理前半断言得証. 于是定理得証.

当方程組具体給出后，欲求其根，也有一个很巧妙的方法. 今举例說明如下：

例 設有一数，依 8 数余 3，依 5 数余 4，依 11 数余 6，求該数.

〔解〕 将 $5\cdot 11\ (=55)$ 的倍数依次用 8 除，看哪一个是余 3 的. 得：

$$\mathrm{rs}(55, 8)=7;$$

$$\mathrm{rs}(2\cdot 7, 8)=6, \quad \mathrm{rs}(3\cdot 7, 8)=5,$$

$$\mathrm{rs}(4\cdot 7, 8)=4, \quad \mathrm{rs}(5\cdot 7, 8)=3.$$

故 55 的倍数中被 8 除余 3 的为 $5\cdot 55=275$.

再找 $8\cdot 11(=88)$ 的倍数被 5 除余 4 的：

$$\mathrm{rs}(88,\ 5)=3;$$

$$\mathrm{rs}(2\cdot 3,\ 5)=1,\quad \mathrm{rs}(3\cdot 3,\ 5)=4.$$

故所找的倍数为 $3\cdot 88=264$.

再找 $8\cdot 5(=40)$ 的倍数被 11 除余 6 的:

$$\mathrm{rs}(40,\ 11)=7;$$

$$\mathrm{rs}(2\cdot 7,\ 11)=3,\quad \mathrm{rs}(3\cdot 7,\ 11)=10,$$

$$\mathrm{rs}(4\cdot 7,\ 11)=6.$$

故所找的倍数为 $4\cdot 40=160$.

所求的根即为該三数之和再加减 $8\cdot 5\cdot 11$ 的倍数(讀者可自証其合理性),即

$$x=275+264+160\pm 440n_1=699\pm 440n_1=259+440n.$$

习　题

1. 試推导下列公式:

(1) $f(u,\ x)Ny=f(u,\ xNy)Ny$;

(2) $f(u,\ x)Nx=f(u,\ 0)Nx$;

(3) $f(u,\ x)N^2x=f(u,\ SDx)N^2x$;

(4) $x=Dx+N^2x,\ SDx=x+Nx$;

(5) $(x \dot{-} y)(Sy \dot{-} x)=0,\ N(x \dot{-} y)N(Sy \dot{-} x)=0$;

(6) $Sx \dot{-} y=x \dot{-} y+N(y \dot{-} x)$;

(7) $x+y \dot{-} z=y \dot{-} z+(x \dot{-} (z \dot{-} y))$;

(8) $N(xy)=Nx+Ny \dot{-} Nx\cdot Ny$;

(9) $x+(y \dot{-} x)=y+(x \dot{-} y)$;

(10) $x \dot{-} (x \dot{-} y)=y \dot{-} (y \dot{-} x)$.

2. 試推导下列公式或規則("$\alpha \vdash\!\!\!-\!\!-\beta$"表示由 α 可推出 β):

(1) $[[a/b]/c]=[a/bc]$;

(2) $\mathrm{rs}(x,\ a)=\mathrm{rs}(y,\ a)\vdash\!\!\!-\!\!-\mathrm{rs}(bx,\ a)=\mathrm{rs}(by,\ a)$;

(3) 当 k 与 a 互素时:

$$\mathrm{rs}(kx,\ a)=\mathrm{rs}(ky,\ a)\vdash\!\!\!-\!\!-\mathrm{rs}(x,\ a)=\mathrm{rs}(y,\ a);$$

(4) $\mathrm{rs}(x,\ a)=\mathrm{rs}(y,\ a)\vdash\!\!\!-\!\!-\mathrm{rs}(x-y,\ a)=0,\ \mathrm{rs}(x \dot{-} y,\ a)=0$;

(5) $\mathrm{rs}(x,\ a)=\mathrm{rs}(y,\ a),\ \mathrm{rs}(u,\ a)=\mathrm{rs}(v,\ a)$

$$\vdash rs(x+u,\ a)=rs(y+v,\ a),\ rs(x\cdot y,\ a)=rs(y\cdot v,\ a)$$

(但推不出

$$rs(x\dot{-}u,\ a)=rs(y\dot{-}v,\ a),$$

同时也推不出

$$rs(x-u,\ a)=rs(y-v,\ a));$$

(6) $x\dot{-}a\left[\frac{x+(a\dot{-}1)}{a}\right]=0,\ a\left[\frac{x+(a\dot{-}1)}{a}\right]\dot{-}x+(a\dot{-}1)=0;$

(7) $rs(rs(x,\ a)+y,\ a)=rs(x+y,\ a);$

(8) $rs\left(x+\left[\frac{x}{2}\right],3\right)=rs(x,\ 2)$, 一般地,

$$rs\left(kx+l\left[\frac{x}{a}\right],\ ak+l\right)=krs(x,\ a);$$

(9) $N\ rs\left(x+\left[\frac{x}{a}\right]+2,\ a+1\right)=N\ rs(x+1,\ a)$(当 $a\neq 0$ 时), 一般地,

$$N\ rs\left(x+\left[\frac{x}{a}\right]+c+2,\ a+1\right)=N\ rs(x+Sc,\ a)\quad (c\leqslant a);$$

(10) 奇数的平方必为 8 的倍数加 1, 即 $rs((2n+1)^2,\ 8)=1$.

3. 試用五則函数表示:

(1) x 以下的最大偶数, x 以下的最大奇数("x 以下"包括 x 在内, 以后均同);

(2) x 以下的 y 的最大倍数, x 以下的 y 的最大倍数加 c($c\leqslant x$且$c\leqslant y$);

(3) x 以下的最大平方数,奇平方数,偶平方数.

4. 試推导以下各式

(1) $\left[\frac{[\sqrt{8z+1}]+1}{2}\right]=\left[\frac{[\sqrt{8(z+1)}]+1}{2}\right]$, 一般地,

$$\left[\frac{[\sqrt{8mz+1}]+(2m\dot{-}1)}{2m}\right]=\left[\frac{[\sqrt{8(m\cdot z+1)}]+(2m\dot{-}1)}{2m}\right]\quad (m\geqslant 1);$$

(2) $\left[\frac{[\sqrt{4x}]+1}{2}\right]=\left[\sqrt{x+[\sqrt{x}]}\right]=[\sqrt{x}]+N^2(Ex\dot{-}[\sqrt{x}]);$

(3) $2[\sqrt{x}]^2\dot{-}x=x\dot{-}2Ex$, 一般地,

$$(b+c)[\sqrt{x}]^2\dot{-}bx=cx\dot{-}(b+c)\cdot Ex;$$

(4) 問 $[\sqrt{4x}]=2[\sqrt{x}]$是否成立?

5. (1) 今有物不知其数, 三三数之余 2, 五五数之余 3, 七七数之余 2, 問物几何? (孙子算經)

(2) 七数剩 1, 八数剩 2, 九数剩 3, 問本数;(楊輝續古摘奇算經)

(3) 十一数余3，十二数余2，十三数余1，問本数；(同上)

(4) 二数余1，五数余2，七数余3，九数余4，問本数．(同上)

6．下列方程組是否有解，試說明其理由．

(1) 三数余2，六数余5，四数余1，求本数；

(2) 三数余2，六数余3，四数余1，求本数；

(3) 在孙子定理中，如果各b_i未必互素，試求該联立方程組有解的充分必要条件．

7．看来，下列方程組：

$$\mathrm{rs}(x, b_1)=c_1, \quad \mathrm{rs}(x, b_2)=c_2$$

的解很难表成b_1、c_1、b_2、c_2的五則函数，試問該解可表成b_1、c_1、b_2、c_2的什么函数？

§2 五則函数(下)

現在引入T_ax，R_ax及$E_ax(a\neq 0)$，它們可看作x^2、$[\sqrt{x}]$、Ex的推广：

$$\boldsymbol{T_ax}\text{ 指 }\quad x+\left[\frac{Sa\cdot x(x\dot{-}1)}{2}\right].$$

T_ax的值也叫做**第x个T_a数**．

$\boldsymbol{R_ax}$ 指　x以下非零T_a数的个数．

$\boldsymbol{E_ax}$ 指　$x\dot{-}T_aR_ax$　(可称之"**T_a数剩余**")．

当$a=0$时，有：

$$T_0x=x+\frac{x(x\dot{-}1)}{2}=\frac{x(x+1)}{2}\quad(\text{三角数}).$$

故T_0数即通常的三角数($T_00=0$, $T_01=1$, $T_02=3$, $T_03=6$, $T_04=10$, 等等)．

R_0x 即　x以下非零三角数的个数．

E_0x 即　$x\dot{-}T_0E_0x$　(三角数剩余)．

E_0x实即x减去x以下最大三角数的結果(故名三角数剩余)．

当$a=1$时，有：

$$T_1x=x+\frac{2x(x\dot{-}1)}{2}=x^2\quad(\text{平方数}),$$

R_1x 指 x 以下非零平方数的个数，卽为 $[\sqrt{x}]$，

$E_1x = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2 = Ex$.

足見 x^2、$[\sqrt{x}]$、Ex 实卽 T_1x、R_1x、E_1x.

$a=0$、1 这两情形最为重要，宜熟习之.

由上面的定义可知，T_ax 为五則函数. 現在再証明 R_ax 也是五則函数（从而，E_ax 亦然），这样，T_ax、R_ax、E_ax 便都是五則函数了.

R_ax 旣表 x 以下非零 T_a 数的个数，显然有 $R_a0=0$. 故若設 $x\neq 0$，这时必有 $R_ax\neq 0$，可設 $R_ax=t+1$，这表明 x 以下有 $t+1$ 个非零 T_a 数，故得

$$T_a(t+1) \leqslant x < T_a(t+2),$$

卽（暫用 b 表示 Sa）：

$$t+1+\frac{bt(t+1)}{2} \leqslant x < t+2+\frac{b(t+1)(t+2)}{2}.$$

讀者可驗証，不論 $b\geqslant 2$ 或 $b=1$（卽 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$），均有

$$(2bt+b+2)^2 \leqslant 8bx+(b\dot{-}2)^2 < (2bt+3b+2)^2.$$

故

$$2bt+b+2 \leqslant [\sqrt{8bx+(a\dot{-}1)^2}] < 2bt+3b+2,$$

$$2bt+2b+1 \leqslant [\sqrt{8bx+(a\dot{-}1)^2}]+a < 2bt+4b+1,$$

$$t+1 \leqslant \left[\frac{[\sqrt{8bx+(a\dot{-}1)^2}]+a}{2b}\right] < t+2.$$

卽当 $x\neq 0$ 时，

$$R_ax(=t+1) = \left[\frac{[\sqrt{8xSa+(a\dot{-}1)^2}]+a}{2a+2}\right].$$

当 $x=0$ 时，上式左右两端均为 0，仍然成立. 故知对一切 a 及一切 x，均有

$$R_ax = [([\sqrt{8xSa+(a\dot{-}1)^2}]+a)/(2a+2)].$$

上述断語便得到了証明.

但是，由这公式而推 R_ax 及 E_ax 的性质却是非常困难的，还

是应該由定义而直接推导它們的性质.

关于 T_ax、R_ax、E_ax 的性质,主要的有下列一些:

(1) $T_ax \dot{-} T_a(x+y)=0$,

(2) $R_ax \dot{-} R_a(x+y)=0$,

(3) $R_aT_ax=x$,

(4) $T_aR_ax \dot{-} x=0$ (即 $T_aR_ax \leqslant x$),

(5) $Sx \dot{-} T_aSR_ax=0$ (即 $x<T_a(R_ax+1)$),

(6) $x=T_aR_ax+E_ax$,

(7) $T_a(x+y)=T_ax+T_ay+Sa\cdot xy$,

(8) $R_a(T_a(x+y)+Sa\cdot x)=x+y$,

讀者可自証这些性质. 經驗表明,对 R_ax 最好由这八个公式推演;如果把它化成五則函数来推导,那将是非常麻煩的.

习　題

1. 試推导下列公式:

(1) $T_ax \geqslant x$, $T_a(x+2)>x+2$;

(2) $T_ax=Sa\cdot(T_1x \dot{-} x)+x=Sa\cdot T_1x \dot{-} a\cdot x$;

(3) 如果 x 为 T_a 数,则 $8xSa+(a \dot{-} 1)^2$ 为平方数;

(4) Sx 为 T_a 数, 当且仅当 $x \dot{-} E_ax=T_a\left[\dfrac{E_ax}{Sa}\right]$;

(5) $E_ax \dot{-} Sa\cdot R_ax=0$;

(6) $(b+c)T_aR_ax \dot{-} bx=cx \dot{-} (b+c)E_ax$,

$(b+c)E_ax \dot{-} bx=cx \dot{-} (b+c)T_aR_ax$;

(7) $N^2x=E_a(T_ax+1)$;

(8) $E_aD(x \dot{-} E_ax)=Sa\cdot DR_ax$, $R_ax=\left[\dfrac{E_aD(x \dot{-} E_ax)}{Sa}\right]+N^2x$;

(9) $T_a(R_ax+2) \dot{-} (x+Sa\cdot R_ax+Sa+2)=T_a(R_ax+1) \dot{-} (x+1)$,

从而

$$NE_a(x+1)=NE_a(x+Sa\cdot R_ax+Sa+2);$$

(10) $Nx=NE_a(Sa+NE_ax+NE_aSx)$ ($a \geqslant 1$ 时),

$Nx=NE_a(4+3a+NE_ax+NE_aSx)$ ($a \geqslant 0$ 时).

2．試推导下列結論：

(1) $E_a x = R_a x$，当且仅当有这样的 t，使 $x = T_a t + t$，

又当且仅当 $x + aR_a x + 1$ 为 T_a 数；

(2) $E_a x \neq R_a x$ 当且仅当 $NE_a(x + a\cdot R_a x + 1 + N^2(E_a x \dot{-} R_a x)) = 0$；

(3) 在 $x = T_a u + v$ 的条件下，$u + v$ 最小 当且仅当 $u = R_a x$ 而 $v = E_a x$.

3．(1) 求 x 以下最大 T_a 数，最大奇 T_a 数，最大偶 T_a 数；

(2) 求 $E_a(T_a(u+v) + ru + Sv + t)$ 之值；

(3) 求 $E_a(T_a(bu+cv) + ru + Sv + t)$ 之值.

4．求証：a 为偶数时，从 $T_a 1$ 起各 T_a 数两奇两偶相間；a 为奇数时，从 $T_a 1$ 起各 T_a 数奇偶相間.

§3 配对函数

大家都知道，少变元的函数的性质总比多变元函数的性质要簡单些，一元函数的性质是最簡单的．因此，常常需要把多变元函数的研究化归为少变元函数(甚至化归为一元函数)的研究．

化归的一个方法是引入矢量．例如，如果引入 n 元矢量 $(a_1, \cdots, a_n)$ 及相应的矢量变元 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，那末 n 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 可以看作一元的矢量函数 $f(\boldsymbol{x})$，这时变元不是数量变元而是矢量变元．这种方法有很多好处(在数学分析尤其在矢量演算中可以看到)，但本质上很难說已經把多元函数化归为一元函数．因为，这里的要求是把多元数量函数化归为一元数量函数，現在却是把多元数量函数化归为一元矢量函数，还不符合要求．

要能够完全符合本問題的要求，只須把每个 n 元矢量都对应于一数(該数叫做該矢量的**編号**)，使得給出一个 n 元矢量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 之后，可以找出它的編号(即有一 n 元函数关系 J_n，使得 $J_n(x_1, \cdots, x_n)$ 永为矢量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的編号)；反之，給出某一矢量的編号 ξ 后，永可找出該矢量本身(即有 n 个一元函数 $\widehat{K}_i$，使得 $\widehat{K}_i(\xi) = x_i$，而 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的編号恰为 ξ)．必須指出，这里只要求对每个矢量均給以編号，幷不要求該編号可穷尽一切自然数，即幷

不要求每一自然数都是某个矢量的編号（放弃这个要求对后面許多討論是必要的）．这时，显然有：既然 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的編号为 $J_n(x_1, \cdots, x_n)$，故

$$\hat{K}_i J_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

这样便得

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\hat{K}_1 J_n, \cdots, \hat{K}_n J_n)(x_1, \cdots, x_n)$$
$$= f(\hat{K}_1, \cdots, \hat{K}_n) J_n(x_1, \cdots, x_n).$$

換言之，$f(x_1, \cdots, x_n)$ 便可表为某个一元函数 $f(\hat{K}_1, \cdots, \hat{K}_n)$（它本质上即 §5 的 f'）与一个固定的 n 元函数 $J_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的迭置．既然 $J_n(x_1, \cdots, x_n)$ 是固定的，故可預先把它的性质弄清楚，这时 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的性质的研究便本质上化归为相应的一元函数 $f(\hat{K}_1, \cdots, \hat{K}_n)$ 的研究了．这样，在某种意义上可以說，多元函数的研究可化归为一元函数的研究．

本节先研究 $n=2$ 的情形，在下节再研究一般 n 的情形．

定义 如果二元函数 pg 与一元函数 K、L 之間滿足下列条件（叫做**配对条件**）：对于一切 x、y，

$$Kpg(x, y) = x, \quad Lpg(x, y) = y,$$

則 pg、K、L 叫做**配对函数組**，pg 叫做**配对合函数**，而 K、L 分别叫做**配对左、右函数**．

配对函数組是非常多的，下面介紹最常用的几种，讀者可驗証它們的确滿足配对条件．

1. $pg_a(x, y) = T_a(x+y)+x$, $K_a x = x \dot{-} T_a R_a x$,

   $L_a x = R_a x \dot{-} K_a x$;

2. $\widetilde{pg}_a(x, y) = T_a(T_a(x+y)+y)+x$, $\widetilde{K}_a x = x \dot{-} T_a R_a x$,

   $\widetilde{L}_a x = \widetilde{K}_a R_a x$;

3. $\overline{pg}_a(x, y) = T_a\left(\left[\dfrac{x+a}{Sa}\right]+y\right)+x$, $\overline{K}_a x = x \dot{-} T_a R_a x$,

   $\overline{L}_a(x) = R_a x \dot{-} \left[\dfrac{\overline{K}_a x + a}{Sa}\right]$.

以上三組函数用得最多，故对它們給以特殊的符号. 下列各組函数則应用較少，故不給以特殊記号了.

4. $pg(x, y)=2^x\cdot(2y+1)$, $Kx=\mathrm{ep}_0 x$, $Lx=[x/2^{Kx+1}]$. 这里 $\mathrm{ep}_0 x$ 指在 x 的质因子分解式中 P_0(即 2) 的幂指数 (注意 $\mathrm{ep}_a x$ 指在 x 的质因子分解式中 P_a 的幂指数).

5. $pg(x, y)=2^x\cdot 3^y$, $Kx=\mathrm{ep}_0 x$, $Lx=\mathrm{ep}_1 x$.

此外还有很多，不再一一列举. 順便指出，1～3 的配对函数是五則函数，而 4, 5 則不是五則函数(因 2^x 非五則函数)，除此之外，更复杂的配对函数也有.

这里将一般地討論配对函数的共通性质，故不但对这五組函数全部适用，而且对别的配对函数也都适用. 下面将首先引进几个用語.

1. 如果 $pg(0, 0)=0$ (从而也必有 $K0=0$, $L0=0$)，則說該配对函数組是**从 0 开始**的.

2. 如果 $pg(x, y)$ 恒 $\neq 0$，則說該配对函数組**无零編号**.

3. 如果 $pg(x, y)$ 对每个变元(另一变元固定)是遞增的，則說該配对函数組是**遞增**的 (注意: 由下面的討論可知，Kx、Lx 不可能遞增).

4. 如果 $pg(x, y)$ 的值窮尽一切自然数(亦即每个自然数均是一編号)，則說該配对函数組是**一一对应**的. 讀者試証: 配对函数組是一一对应的当且仅当 $pg(Kx, Lx)=x$ 永眞.

5. 設有两个一元函数 $A(x)$、$B(x)$，如果当 $ASx\neq 0$ 时必有 $ASx=SAx$ 及 $BSx=Bx$，則称 $A(x)$ 对 $B(x)$ 是**平梯**的(当 Ax 逐步遞增时，Bx 保持不变，故名平梯).

如果 Kx 对 Lx 是平梯的，則称該配对函数組是**平梯**的.

此外，还可列举好些性质，但对配对函数組，我們只注意这五种性质.

讀者試証下列几条簡单定理(1～3).

定理 1 性质 1、2 不可兼；性质 2、4 不可兼；性质 4、5 不可兼．此外，如果具性质 3、4，则必具性质 1．

因此，在这五个性质中，任一配对函数組最多只能具其中三种，而且如具三种性质便只有下列可能：具 (1, 3, 4)；或具 (1, 3, 5)；或具 (2, 3, 5)． 在上面列举的五組配对函数組中，第二組具 (1, 3, 5)，第三組具 (1, 3, 4)；其余三組均只具两个性质，第一組具 (1, 3)，第四、五組具 (2, 3)．讀者可自行驗証．

定理 2 設任給一配对函数組 pg、K、L，则

$$pg^*(x, y)=Spg(x, y), \quad K^*x=KDx, \quad L^*x=LDx$$

也是一个配对函数組，它沒有零編号，而且当 pg 为递增时，pg^* 也为递增．

定理 3 如果 pg、K、L 为无零編号的配对函数組，則

$$pg^*(x, y)=Dpg(x, y), \quad K^*x=KSx, \quad L^*x=LSx$$

也是配对函数組；如果 pg 递增，則 pg^* 也递增．

現在再研究配对函数的特征性质，即一函数可作为配对函数的必要充分条件．

定理 4 二元函数 $f(x, y)$ 可作配对合函数的必要充分条件是： 由 $f(x_1, x_2)=f(y_1, y_2)$ 可推得 $(x_1, x_2)=(y_1, y_2)$．

証明 必要性． 如果 $f(x, y)$ 可作配对合函数，则必存在配对左、右函数 K、L，使得

$$Kf(x, y)=x, \quad Lf(x, y)=y,$$

所以，当 $f(x_1, x_2)=f(y_1, y_2)$ 时，必有

$$x_1=Kf(x_1, x_2)=Kf(y_1, y_2)=y_1,$$
$$x_2=Lf(x_1, x_2)=Kf(y_1, y_2)=y_2.$$

充分性． 設 $f(x, y)$ 满足所述条件，定义两函数 K、L 如下：

$$Kz=\begin{cases} x, & \text{当有 } y \text{ 使}(x, y)\text{满足 } f(x, y)=z \text{ 时}, \\ \text{任意預先选定的 } a(z), & \text{当 } f(x, y) \text{ 永 } \neq z \text{ 时}. \end{cases}$$

$$Lz=\begin{cases} y, & \text{当有 } x \text{ 使}(x,\ y)\text{满足 } f(x,\ y)=z \text{ 时,} \\ \text{任意預先选定的 } b(z), & \text{当 } f(x,\ y) \text{ 永 } \neq z \text{ 时.} \end{cases}$$

由假設,如果有 x、y 使 $f(x, y)=z$, 則只有一組 (x, y), 因此 Kz、Lz 必是单值的函数,亦卽 Kz、Lz 是确定的函数. 由定义,易知有

$$Kf(x,\ y)=x,\quad Lf(x,\ y)=y,$$

故 f、K、L 組成一組配对函数,于是充分性得証.

注意: 給出函数 $f(x, y)$ 及 z 后,未必可以在有限步驟內驗知 f 是否能取值 z, 卽是否 z 在 f 的值域中. 因此, Kz、Lz 只是在古典意义之下是确定的, 但未必可以实际計算其值. 如果預先知道 $f(x, y)$ 有下列性质:

$$\text{如果 } f(x,\ y)=z, \text{ 則必 } x\leqslant A(z),\ y\leqslant B(z),$$

这时可在 $A(z)$ 以下、$B(z)$ 以下而檢查 $f(x, y)$ 之值, 那末 Kz、Lz 的值便可以实际算出了(假定 $f(x, y)$ 的各值均可計算).

还須注意一点, 如果 $f(x, y)$ 的值窮尽一切自然数, 則 Kz 及 Lz 是唯一确定的. 但如果存在有某些 z, 使得 $f(x, y)$ 恒 $\neq z$, 則对这个 z 說来, Kz、Lz 可任意定义,故 Kz、Lz 也就不是唯一确定的了.

定理 5 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 可同时作配对左、右函数的必要充分条件是:任給两数 a、b, 下列联立方程

$$f_1(x)=a,\quad f_2(x)=b$$

必有解.

証明 必要性. 如果它們可同时作配对左、右函数, 則必有相应的合函数 $pg(x, y)$, 显見这时上面的联立方程至少有一解 $pg(a, b)$.

充分性. 如果上联立方程至少有一解,那么可从

$$f_1(z)=x,\quad f_2(z)=y$$

的各种 z 根中任意选取一值作为 $pg(x, y)$, 例如可选最小 z 根. 显見, $pg(x, y)$ 必为相应的配对合函数. 定理得証.

注意：如果該方程組对每个 a、b 均有一解，也只有一解，則只存在一个相应的配对合函数；如果不止一解，則合函数也不是唯一的．对平梯函数組而言，該方程組必有无穷多解．

定理 6（馬尔科夫，A. A. Марков） 一元函数 $f(x)$ 可作配对左（或右）函数的必要充分条件是：它取任何一值均无穷多次．

証明 必要性． 如果 $f(x)$ 可作配对左函数，則必有一配对合函数 $pg(x, y)$，使得 $fpg(x, y)=x$．試任給一数 x_0，由于

$$fpg(x_0, 0)=fpg(x_0, 1)=fpg(x_0, 2)=\cdots=x_0,$$

显見 f 取得 x_0 值无穷多次．

充分性． 如果 $f(x)$ 取得每一值均无穷多次，今定义一函数 $g(x)$ 如下：

从 $f(x)=0$ 的无穷多个根 x_{0i} 中，任意选取一个无穷子序列：$x'_{00}, x'_{01}, x'_{02}, \cdots$，并定义 $g(x'_{0i})=i$；一般，从 $f(x)=a$ 的无穷多个根 x_{ai} 中，任意选取一个无穷子序列：$x'_{a0}, x'_{a1}, x'_{a2}, \cdots$，并定义 $g(x'_{ai})=i$． 对于此外的 x（未被选取的），則 $g(x)$ 可任意定义．

显然，对于任給的 a、b，方程組

$$f(x)=a, \quad g(x)=b$$

必有解（至少有一解是：x'_{ab}）． 因此，$f(x)$、$g(x)$ 便可作为相应的配对左、右函数，亦即 $f(x)$ 可作配对左函数（至于它可作配对右函数亦是显然的）． 定理得証．

注意：由于无穷子序列可任意选定，故 $g(x)$ 决不能唯一确定，相应的 $pg(x, y)$ 更不能唯一确定．由定理 6 还可得出：只要找出了一組配对函数組，那末便可作出无穷多組配对函数組． 这是因为从其中的 Kx 中可任意的找出相应的配对右函数及配对合函数．

由定理 4～6，便得出了配对函数的特征性质．

习 題

1．将本节未証的定理詳細証明之.

2．对于平梯配对函数組說来,任給 a、b，恒有 u 使得

$$t\leqslant a \text{ 时 } \quad K(u+t)=t \text{ 而 } L(u+t)=b.$$

3．試証：如果 pg、K、L 为一組配对函数,則

$$pg^2xyx, \quad pg^2xxy, \quad pg^2xyy, \quad pg(x, pg(x, y))$$

等都是配对合函数;試求出其相应的配对左右函数.

4．試証下面的三函数可組成一一对应的配对函数組，并且用簡单的語句叙述它对二元矢量的編号的規律：

$$f(x, y)=(y^2+2x)N(x\dot{-}y)+(x^2+2y+1)N^2(x\dot{-}y),$$

$$g_1(x)=[\sqrt{x}]\,\mathrm{rs}(Ex, 2)+\left[\frac{Ex}{2}\right]N\mathrm{rs}(Ex, 2),$$

$$g_2(x)=[\sqrt{x}]\,N\,\mathrm{rs}(Ex, 2)+\left[\frac{Ex}{2}\right]\mathrm{rs}(Ex, 2).$$

5．設 pg 具有下列性质:它为配对合函数,且对任何 a、b，不可能有 c、d 滿足

$$pg(a, b)<pg(c, d)\leqslant pg(a, b)+a$$

(即它沒有別的值在 $pg(a, b)$ 与 $pg(a, b)+b$ 之間)．再用 Wx 表示"x 以下最大的 pg 值",則

$$pg^*(a, b)=pg(a, b)+a, \quad K^*x=x\dot{-}Wx, \quad L^*x=LWx$$

亦組成配对函数組,且具平梯性质.

6．問下列函数能否作配对合函数,如可能,試求其相应的左、右函数(只求一个)：

(1) $f(x, y)=2^x(2y+3)$;

(2) $f(x, y)=3^xy^2$;

(3) $f(x, y)=(x+y+4)^2+y$;

(4) $f(x, y)=(x^2+y^2)^2+x^2+y^2+x$.

7．問下列函数能否同时作配对左、右函数，如可能，試求相应的合函数(只求一个)：

(1) $f_1(x)=Ex, \ f_2(x)=E(x+[\sqrt{x}])$;

(2) $f_1(x)=Ex, \ f_2(x)=E\left[\frac{x}{2}\right]$;

(3) $f_1(x)=Ex$, $f_2(x)=E(4x^2+3x+1)$.

8．試証：給出配对左函数 Kx 后，相应的配对右函数可如下作出：

$$Lx=D\sum_{t\to x}N\,\mathrm{eq}(Ki,\ Kx).$$

9．問下列函数能否作配对左函数，如可能，試求相应的右函数以及合函数(只求一个)．各函数的値列为：

(1) 0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, …;

(2) 0, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, …;

(3) 0, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 2, 4, 1, 3, 5, 0, 2, 4, 6, 1, ….

10．求証 $L_ax=\left[\dfrac{K_aD(x\dot{-}K_ax)}{Sa}\right]+K_aS(x\dot{-}K_ax)\dot{-}K_ax.$

(本题指出，L_ax 可用 K_ax 及更簡函数表示.)

11．求証 $K_0x=L_0(x+2L_0x+2)$.

(本题指出，K_0x 可用 L_0x 及更簡函数表示，至于一般的 K_ax 能否用 L_ax 及更簡函数表示的問题，对此今尚未知.)

12．求証：

(1) $\overline{L}_a(T_ax+x)=x\dot{-}\left[\dfrac{x+a}{Sa}\right]$;

(2) $R_ax=\overline{L}_a(x+Sa\cdot(\overline{L}_ax+1)+1)$;

(3) $NE_aSx=N(L_ax+NL_aSx)$;

(4) $L_a(T_ax+x+1)=Nx$ $(a\neq 0$ 时);

(5) $N^2L_a(5+N^2L_ax+NL_aSx+N^2L_aSSx)=Nx$，如把 L_a 改为 $\overline{L}_a$ 则如何?

13．試求 $K_1(4pg_1(x,\ y))$ 及 $L_1(4pg_1(x,\ y))$;

一般地，試求 $K_a(b^2pg_a(x,\ y))$ 及 $L_a(b^2pg_a(x,\ y))$.

§4 有限数列的表示

既然对二元矢量給了編号，那末对 n 元矢量也很容易給出編号，这时还无須引入新函数．对 n 元矢量編号的方法最常用的有下列两种：

第一种是：

$$z=J_n(x_0,\ \cdots,\ x_n)=pgx_0pgx_1pgx_2\cdots pgx_{n-1}x_n,$$

这时

$$Kz=x_0,\ KLz=x_1,\ \cdots,\ KL^{n-1}z=x_{n-1},\ L^nz=x_n,$$

故

$$\hat{K}_i=KL^i\quad(0\leqslant i\leqslant n-1),\quad \hat{K}_n=L^n.$$

第二种是:

$$z=J_n(x_0,\ \cdots,\ x_n)=pg^nx_0x_1x_2\cdots x_n\,(=\underset{t\to n}{pg}\,x_t),$$

这时

$$Lz=x_n,\ LKz=x_{n-1},\ \cdots,\ LK^{n-1}z=x_1,\ K^nz=x_0,$$

故

$$\hat{K}_0=K^n,\quad \hat{K}_i=LK^{n-i}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

在下面将使用第二种,讀者应熟习:

$$\begin{cases}LK^{n-i}pg^nx_0x_1\cdots x_n=x_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),\\ K^npg^nx_0x_1\cdots x_n=x_0.\end{cases}$$

如果引入新函数,还可有别的更方便的表示法. 現在再介紹两种也很重要的表示法.

第三种是:

$$z=J_n(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=P_0^{x_0}P_1^{x_1}\cdots P_n^{x_n}\,(=\prod_{t\to n}P_t^{x_t}),$$

这时

$$\mathrm{eq}_i z=x_i,$$

故

$$\hat{K}_it=\mathrm{eq}_i\,t\quad(0\leqslant i\leqslant n).$$

介紹第四种方法之前,先来証明下述引理和定理.

引理 对于任給的 $n+1$ 个数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$, 必存在 c、d, 使

(1) $\mathrm{rs}(c,\ 1+(i+1)d)=a_i\quad(0\leqslant i\leqslant n)$,

(2) $d\leqslant 2^{s^s}$ 且 $c\leqslant 2^{(n+2)^s+ns^s}$ (其中 $s=\max\limits_{i\to n}(a_i+n)$).

証明 設命 $s=\max\limits_{i\to n}(a_i+n)$, 則 $s\geqslant a_i$, $s\geqslant n$. 取 $d=s!\,(\leqslant s^s\leqslant 2^{s^s})$. 暫記 $1+(i+1)d$ 为 d_i, 則

$$d_i\geqslant 1+d\geqslant 1+s>a_i.$$

其次,当 $i\neq j$ 时, d_i 与 d_j 的公因子必可除尽(設 $i>j$)

$$(i+1)d_j-(j+1)d_i=i-j,$$

但 $i-j$ 的因子必为 $n!$ 的因子，从而必为 $s!$（即 d）的因子. 显然，d_i 与 d 的公因子只有 1，故 d_i，d_j（$i\neq j$ 时）的公因子只有 1，即 d_i 与 d_j 必互素. 故由孙子定理可知：下联立方程

$$\mathrm{rs}(x,\ 1+(i+1)d)=a_i \quad (0\leqslant i\leqslant n)$$

必有解. 取其最小解 c，则断言(1)得証.

其次，由于 $s!\leqslant s^s\leqslant 2^{s^2}$，故得

$$c\leqslant d_0d_1\cdots d_n\leqslant 2d\cdot 3d\cdots(n+2)d=(n+2)!d^n$$
$$\leqslant(n+2)^{n+2}\cdot(s!)^n\leqslant 2^{(n+2)^2}2^{ns^2},$$

故断言(2)亦得証.

定理 1 任給 $n+1$ 个数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，或任給一函数 $a(x)$，恒可找出一数 w，使得

$$\mathrm{rs}(Kw,\ 1+(i+1)Lw)=a_i\ (\text{或}=a(i)) \quad (0\leqslant i\leqslant n),$$

而且，如果相应于 K、L 的配对合函数是遞增的（分别对各变元遞增），那末还可使得

$$w\leqslant pg(2^{(n+2)^2}2^{ns^2},\ 2^{s^2}) \quad (s=\max_{i\to n}(a_i+n)).$$

証明 由上引理找出 c、d 后，取 $w=pg(c,\ d)$ 便满足定理的要求.

一般情况下（例外見第三章 §5），以后把

$$\mathrm{rs}(Kw,\ 1+(i+1)Lw)=a_i \quad (0\leqslant i\leqslant n)$$

的最小根記为 $\mathop{\mathrm{seq}}\limits_{i\to n} a_i$，而函数 $\mathrm{rs}(Kw,\ 1+(i+1)Lw)$ 記为 $\mathrm{tm}(i,\ w)$ 或 $\mathrm{tm}_i w$. 根据本定理可知：$\mathop{\mathrm{seq}}\limits_{i\to n} a_i$ 必存在，且永有

$$\mathrm{tm}(i,\ \mathop{\mathrm{seq}}\limits_{t\to n} a_t)=\mathrm{tm}_i \mathop{\mathrm{seq}}\limits_{t\to n} a_t=a_i \quad (0\leqslant i\leqslant n).$$

第四种对 n 元矢量的編号是：

$$z=J_n(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=\mathop{\mathrm{seq}}\limits_{i\to n} x_i,$$

而

$$\widehat{K}_i z=\mathrm{tm}(i,\ z).$$

当然，除掉这四种以外，还有别的許多編号法.

如果容許 n 为变元，那末 J_n 便不再是函数（因为函数的变元个数必是固定的）而只能是算子，这时把相应的編号不記为 $J_n(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 而記为 $\underset{t\to n}{J} x_t$，并叫做**叙列算子**，至于 $\widehat{K}_i$，則仍是照旧，如它依賴于 n，則記为 $\widehat{K}(n, i, x)$，叫做**求項函数**.

容易驗証，卽使 n 为变元时，上述四种方式仍然适用，这时仍有（第一种从略）：

第二种：$K^n \underset{t\to n}{pg}\, x_t = x_0,\quad LK^{n-i} \underset{t\to n}{pg}\, x_t = x_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$；

第三种：$\mathrm{ep}_i \prod\limits_{t\to n} P_t^{x_t} = x_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$；

第四种：$\mathrm{tm}_i \underset{t\to n}{\mathrm{seq}}\, x_t = x_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$.

利用数列的表示法可推出下述定理，它在今后有重要的应用.

定理 2（变元归一法或变元增大法） 任給两函数 $h(n, x)$ 及 $B(u, x, t_1, \cdots, t_r)$，恒可找出另三个函数 $g(u, x)$（它叫做 h 的**堆积函数**）及 $\hat{B}$、$\widetilde{B}$，使得：只要

$$U \geqslant \max_{i\to r} u_i, \quad X \geqslant \max_{i\to r} x_i,$$

便有

$$(1)\quad h(u_i, x_i) = \widehat{K}_{u_i}\widehat{K}_{x_i} g(U, X),$$

$$(2)\quad B(u, x, h(u_1, x_1), \cdots, h(u_r, x_r)) = \widetilde{B}(u, x, u_1, x_1, \cdots, u_r, x_r, g(U, X)),$$

$$(3)\quad B(u, x, g(u_1, x_1), \cdots, g(u_r, x_r)) = \hat{B}(u, x, u_1, x_1, \cdots, u_r, x_r, g(U, X)).$$

証明 可取 $g(u, x) = \underset{j\to x}{J}\ \underset{i\to u}{J}\, h(i, j)$. 显然，当 $U \geqslant \max\limits_{i\to r} u_i$，$X \geqslant \max\limits_{i\to r} x_i$ 时，(1) 式成立，从而又有

$$\begin{aligned} &B(u, x, h(u_1, x_1), \cdots, h(u_r, x_r)) \\ &= B(u, x, \widehat{K}_{u_1}\widehat{K}_{x_1} g(U, X), \cdots, \widehat{K}_{u_r}\widehat{K}_{x_r} g(U, X)) \\ &= \widetilde{B}(u, x, u_1, x_1, \cdots, u_r, x_r, g(U, X)), \end{aligned}$$

卽 (2) 成立. 仿此可証 (3)，故定理得証.

注意：如果 u_i、x_i 为 u、x 的函数，那末还可要求 (2) 及 (3) 的右端是 $\widetilde{B}(u, x, g(U, X))$ 及 $\hat{B}(u, x, g(U, x))$.

由于本定理中 g 的填式只是 $g(U, X)$，故名**变元归一法**，又由于 U、X 可以任意增大而(1)～(3)仍成立，故又名**变元增大法**.

习　题

1. 选取 pg_1、K_1、L_1 或 pg_0、K_0、L_0 为所用的配对函数組，試求 $J_3(2, 3, 4)$ 及 $J_3(1, 2, 1)$ 之值（四种表示式均計算）.

2. 試証：对三元矢量可作如下的編号：

$$J_3(x, y, z)=2^x3^y(6z+1),$$

$$\hat{K}_1x=\mathrm{ep}_0 x,\quad \hat{K}_2x=\mathrm{ep}_1 x,\quad \hat{K}_3x=\left[\left(\left[\frac{x}{2^{\mathrm{ep}_0 x}3^{\mathrm{ep}_1 x}}\right]-1\right)\Big/6\right].$$

3. 試証：在本节引理中，d 可取为 $(k+1)h(n)$，这里 $h(n)$ 为 $n+1$ 以下的质数相乘积，而 $k=[(\max\limits_{i\to n} a_i)/h(n)]$（当 $n=0$ 时 $h(n)$ 指 1）.

4. 試証：如命

$$\mathrm{tm}(i, w) \text{为} \mathrm{rs}(Kw, S(KLw \dot{-} (KLw \dot{-} i))\cdot[DL^2w/SKLw]+1),$$

則方程組 $\mathrm{tm}(i, w)=a_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 仍有根，其最小根仍可取作相应的 $\mathop{\mathrm{seq}}\limits_{t\to n} a_t$.

5. 試用变元归一法把下式变化，找出所引入的新函数及新公式.

(1) $h(u+x, x^2)\cdot h(x\dot{-}u, ux)$;

(2) $h(u, 3u+x)\dot{-}x+h(x, u)$.

§5 迭置的化归

在本节，不必假定 pg、K、L 三个函数均已作出，为了使本节結果可以有更广泛的应用．我們只假設可以作出下列的函数：

F 表 $pg(I, I)$；G 表 $pg(K^2, L)$；H 表 $pg(L, LK)$.

于是有：

$$G^n=pg(K^{n+1}, L),$$

$$G^nF=pg(K^n, I) \qquad \text{(以后記为 } G_n\text{)},$$

$$HG^nF=HG_n=pg(I, LK^n) \qquad \text{(以后記为 } H_n\text{)},$$

$$HG^n=pg(L, LK^{n+1}),$$

$$G^mH_n=pg(K^m, LK^n),$$

$$HGH_2F=pg(LK, L).$$

实际上，以后只用 G_n 及 H_n.

如果再有函数 L, 則还可作出

$$LH_n = LK^n,$$
$$LF = I.$$

这些即是本节所經常使用的函数，以后不再特别标明（如使用此外的函数則必标明）.

有两种特殊的算子（实际上这两算子可用迭置及函数来表示）非常有用：

定义 設 A 为 m 元函数，則算子 $'$ 及 $*$ 作用于 A 的結果分别为

$$A' = A(LK^{m-1}, LK^{m-2}, \cdots, LK, L),$$
$$A^* = pg(L, A'K) = pg(L, A(LK^m, LK^{m-1}, \cdots, LK^2, LK)).$$

我們有下列的簡单定理：

定理 1 关于算子 $'$ 及 $*$, 有：

(1) A' 及 A^* 永为一元函数；

(2) 由 A、$LK^i(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ 作 $(m, 1)$ 迭置得 A',

由 A'、$\underset{t\to m}{pg}\, x_t$ 作 $(1, m)$ 迭置得 A,

由 A、pg、$LK^i(0 \leqslant i \leqslant m)$ 作 $(m, 1)$、$(2, 1)$ 迭置得 A^*,

由 A^*、$\underset{t\to m}{pg}\, x_t$、$L$、$F$ 作 $(1, m)$、$(1, 1)$ 迭置得 A.

在 $\underset{t\to m}{pg}\, x_t$ 中暂时約定 x_0 为 x_1, 使得它只是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数.

讀者自証. 可注意

$$A(x_1, \cdots, x_n) = A' \underset{t\to m}{pg}\, x_t,$$
$$A' = LA^*F.$$

定理 2 我們有：

(1) $(A(B_1, \cdots, B_m))' = A(B_1', \cdots, B_m')$

$$= A' pg^m I B_1' B_2' \cdots B_m';$$

(2) $pg^h I(B_1'K)(B_2'K)\cdots(B_h'K)$

$$= B_h^* G_h B_{h-1}^* G_{h-1} \cdots B_2^* G_2 B_1^* G_1;$$

(3) $(A(B_1, \cdots, B_m))^* = A^* H_m pg^m I(B_1' K)\cdots(B_m' K)$

$$= A^* H_m B_m^* G_m B_{m-1}^* G_{m-1} \cdots B_2^* G_2 B_1^* G_1.$$

証明 試命 $f = A(B_1, \cdots, B_m)$，而諸 B_i 为 n 元的，則有：

(1) $f' = f(LK^{n-1}, LK^{n-2}, \cdots, LK, L)$

$$= A(B_1(LK^{n-1}, \cdots, L), \cdots, B_m(LK^{n-1}, \cdots, L)$$

$$= A(B_1', \cdots, B_m')$$

$$= A' pg^m I B_1' B_2' \cdots B_m'.$$

(注意：大体上可說："$'$"与 pg^m 是互相抵消的.)

(2) 把 $B_i^* G_i$ 先迭置得函数 $pg(I, B_i' K^i)$，然后用数学归納法証明.

奠基： 当 $h=1$ 时，(2) 的左右两端均为 $pgI(B_1' K)$，显然成立.

归納： 討論情形 $h+1$，我們有

$$B_{h+1}^* H_{h+1} B_h^* H_h \cdots B_1^* H_1$$

$$= pg(I, B_{h+1}' K^{h+1}) pg^h I(B_1' K)\cdots(B_h' K) \quad \text{(归納假設)}$$

$$= pg(pg^h I(B_1' K)\cdots(B_h' K), B_{h+1}' KI)$$

$$= pg^{h+1} I(B_1' K)\cdots(B_h' K)(B_{h+1}' K),$$

故依数学归納法，(2) 得証.

(3) 注意 $A^* H_m = pg(L, A' K) pg(I, LK^m) = pg(LK^m, A')$，故根据 (2) 得

$$A^* H_m B_m^* G_m B_{m-1}^* G_{m-1} \cdots B_1^* G_1$$

$$= pg(LK^m, A') pg^m I(B_1' K)\cdots(B_m' K)$$

$$= pg(LI, A' pg^m I(B_1' K)\cdots(B_m' K))$$

$$= pg(L, A(B_1' K, \cdots, B_m' K))$$

$$= pg(L, A(B_1', \cdots, B_m') K)$$

$$= pg(L, (A(B_1, \cdots, B_m))' K) = (A(B_1, \cdots, B_m))^*.$$

于是定理得証.

由 (1) 可知：$(A(B_1, \cdots, B_m))'$ 可由 $A', B_1', \cdots, B_m'$ 根据

(2, 1) 及 (1, 1) 迭置而作出(借助于常函数 pg), 由 (3) 可知: $(A(B_1, \cdots, B_m))^*$ 可由 A^*, B_1^*, $\cdots$, B_m^* 根据(1, 1)迭置作出(借助于常函数 H_i 及 G_i). 組成过程中根本用不到多于二元的函数, 更用不到(m, n)迭置$(m>2$ 或 $n>2)$, 这一点是很値得注意的.

定理 3 如果 M、N 可由函数 $A_1, \cdots, A_h$ 作迭置而得, 則 $pg(M', N')$ 可由 $A_1^*, \cdots, A_h^*, F, G, H$ 作 (1, 1) 迭置而得, 如 M、N 为一元, $pg(M, N)$亦可同法得到.

証明 有了 F、G、H, 卽可得 G_n 及 H_n, 从而利用定理 2(3), 因为 M、N 可由 $A_1, \cdots, A_h$ 作迭置而得, 故 M^*、N^* 卽可由 A_1^*, $\cdots$, A_h^*(及 G_n、H_n)作(1, 1)迭置而得, 但注意 $M^*=pg(L, M'K)$, $N^*=pg(L, N'K)$, 故

$$N^*pg(K, L)M^*F=pg(L, N'K)pg(L, M'K)pg(I, I)$$
$$=pg(M', N').$$

如果 M、N 为一元, 則 $M'=ML$, $N'=NL$, 故

$$pg(M', N')F=pg(ML, NL)pg(I, I)=pg(M, N).$$

定理得証.

推論 1 如果 M、N 可由函数 I、K、L 作迭置而得, 則 $pg(M, N)$ 可由 $pg(LK, KL)$、$pg(L, I)$作(1, 1)迭置而得. 这里的 $pg(L, I)$还可換为 $pg(I, K)$.

証明 由定理 3, $pg(M, N)$ 必可由 $I^*(=pg(L, ILK))$、$K^*(=pg(L, KLK))$、$L^*(=pg(L, LLK))$、F、G、H作(1, 1)迭置而得. 容易驗証, 这些均可由 $pg(LK, KL)$ 及 $pg(L, I)$(或 $pg(I, K)$)作出.

推論 2 如果 M、N 可由函数 I、K、L、pg 作迭置而得, 則 $pg(M', L')$ 可由 $pg(LK, KL)$、$pg(L, I)$(或 $pg(I, K)$) 及 $pg^*(=pg(L, pg(LK^2, LK)))$作(1, 1)迭置而得, 如 M、N 为一元函数, 則 $pg(M, N)$ 也可由該三函数作 (1, 1) 迭置而得(讀者自証).

算子 $'$ 与 $*$ 还有更大的用处,这便是在迭置的化归(及后面将談到的算子的化归)方面.

定理 4 (迭置第一化归定理) 如果已經作出函数 LK^i 及 pg、$pg^n x_1 x_1 \cdots x_n$, 則一般的 (m, n) 迭置可化归为 $(1, 1)$ 迭置及下列的特殊形状的迭置:

$(m, 1^*)$, $(n, 1^*)$: 把 $LK^i(0 \leqslant i \leqslant m-1$ 或 $0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 代入到 m 元(或 n 元)函数去;

$(2^*, 1)$: 把一元函数代入到函数 pg 去;

$(1, n^*)$: 把函数 $pg^n x_1 x_1 \cdots x_n$ 代入到一元函数去.

証明 設利用 (m, n) 迭置由 m 元函数 A 及 m 个 n 元函数 $B_1, \cdots, B_m$ 而作 $A(B_1, \cdots, B_m)$. 今改用下述过程:

由 A 与 $LK^i(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ 利用 $(m, 1^*)$ 迭置作 A';

由 $B_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 与 $LK^j(0 \leqslant j \leqslant n-1)$ 利用 $(n, 1^*)$ 迭置作 $B'_1, \cdots, B'_m$.

由 pg 与諸 B'_i 利用 $(2^*, 1)$ 迭置得 $pg^m B'_1 B'_1 \cdots B'_m$.

由 A' 与 $pg^m B'_1 B'_1 \cdots B'_m$ 作 $(1, 1)$ 迭置得 $A' pg^m B'_1 B'_1 \cdots B'_m$, 依定理 2 可知該函数即 $(A(B_1, \cdots, B_m))'$.

由 $(A(B_1, \cdots, B_m))'$ 与 $pg^n x_1 x_1 \cdots x_n$ 作 $(1, n^*)$ 迭置即得 $A(B_1, \cdots, B_m)$.

故知 (m, n) 迭置可代以上述各迭置(当所提到的各函数可利用时),定理得証.

本定理所提到各迭置中,至少有一函数的变元个数 $\leqslant 2$, 而且除 $(1, 1)$ 迭置外, 其余四种迭置至少有一处 (已用星号标出) 只作用于特殊的函数.

定理 5 (迭置的第二化归定理) 如果函数 F、G、H、L 及 pg、$pg^n x_1 x_1 \cdots x_n$ 已經作出,則一般的 (m, n) 迭置可化归为 $(1, 1)$ 迭置及 $(m, 1^*)$、$(n, 1^*)$、$(2^*, 1^*)$、$(1, n^*)$ 迭置. 这里, $(2^*, 1^*)$ 迭置是指把 I 代入 pg 的第一变元而把一元函数代入 pg 的第二变

元.

証明 設由 (m, n) 迭置作出 $A(B_1, \cdots, B_m)$，下文暫記为 f. 今改用下列过程.

由 $A, B_1, \cdots, B_m, LK^i(1 \leqslant i \leqslant m$ 或 $1 \leqslant i \leqslant n)$ 利用 $(m, 1^*)$ 及 $(n, 1^*)$ 迭置作出 $A'K, B'_1K, \cdots, B'_mK$. 再由它們及 pg 利用 $(2^*, 1^*)$ 可作 $pg(I, A'K)$、$pg(I, B'_iK)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

由 F、G、H 利用 $(1, 1)$ 迭置可作 $pg(LK, L)$，由 $pg(LK, L)$ 及 $pg(I, A'K)$、$pg(I, B'_iK)$ 利用 $(1, 1)$ 迭置可作

$$A^*(=pg(L, A'K)=pg(LK, L)pg(I, A'K))$$

及

$$B_i^* \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

由 A^*、B_i^* 及 H_m、G_i (其中 $1 \leqslant i \leqslant m$) 利用 $(1, 1)$ 迭置可作 $(A(B_1, \cdots, B_m))^*$，而 G_i 及 H_m 可由 F、G、H 利用 $(1, 1)$ 迭置作出. 即 f^* 可以作出.

由于 $f'=Lf^*F$，故它可利用 $(1, 1)$ 迭置作出.

由 f' 及 $pg^n x_1 x_1 \cdots x_n$ 利用 $(1, n^*)$ 迭置可作出 f 即可以作出 $A(B_1, \cdots, B_m)$. 于是定理得証.

第二化归比起第一化归来，只是把 $(2^*, 1)$ 迭置再化归为 $(2^*, 1^*)$ 迭置. 表面看来，改进之处极微，但实际上，第一化归中的 $(2^*, 1)$ 迭置用于由 A' 及諸 B'_i 而作 $(A(B_1, \cdots, B_m))'$ 的过程中，而在第二化归中，$(2^*, 1^*)$ 只用于作出 A^* 及 B^* 的过程中. 但当由 A^* 及諸 B_i^* 而作 $(A(B_1, \cdots, B_m))^*$ 时，却只用到 $(1, 1)$ 迭置. 这一点微小的区别，却发生了巨大的影响.

原来，通常要确定(或給出)一个函数时，总是采用給出命名式的方法，指出該函数作用于彼此不同的变元时所得的結果；例如，通常总說

命

$$f(x_1, x_2, x_3)=(x_1 \cdot x_2+x_2 \cdot x_3)N(x_1 \dot{-} x_2),$$

但是，現在旣已証明 f 与 f' 可以彼此互相定义，故此尽可以利用 f' 来确定 f，即可以說

命

$$f'=(LK^2\cdot LK+LK\cdot L)N(LK^2\dot{-}LK).$$

的确，使用 f' 与使用 f 的命名式 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是同样的方便，而且是同样的易于了解的.

同样，既然 f^* 与 f 也是可以互相定义的，当然也可以利用 f^* 来确定 f，即亦可以說

命

$$f^*=pg(L, LK^3\cdot LK^2+LK^2\cdot LK)N(LK^3\dot{-}LK^2)),$$

它虽則較不直观，但同样地易于运算、易于理解.

如果約定，除函数 pg 外的其他多元函数 f 均以 f' 为代表，"給出 f" 即指"給出 f'"，"求 f"即指"求 f'". 这时，由"f 而化 f'"及"由 f' 而化回 f"的过程便根本无用，因而上述第一化归过程中的 $(m, 1^*)$、$(n, 1^*)$、$(1, n^*)$ 三种迭置便根本无用. 故有:

定理 6（迭置的第一化归定理的修整） 如果除二元函数 pg 以外，别的多元函数 f 均改用 f' 作代表（一元函数 f 仍用 f 本身），那末只使用 $(1, 1)$ 迭置及 $(2^*, 1)$ 迭置便足够了，后者指的是把一元函数代入到 pg 中去的迭置.

同样道理，又得

定理 7（迭置第二化归定理的修整） 如果一切多元函数 f 均以 f^* 作代表（一元函数 f 仍用 f 本身），那末当 F、G、H 已經作出后，只使用 $(1, 1)$ 迭置便足够了. 这时所使用的函数可限于一元函数.

由定理 7，可說是已把迭置化归到最簡了.

此外，使用 f' 或 f^* 来代替 f 的命名式还有一好处. 如果使用 f 的命名式又想把迭置化归为 (m, n) 迭置，这就必須引用广义么函数

$$I_{mn}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = x_n \quad (1 \leqslant n \leqslant m),$$

由于m、n可为任意正整数(只須$n \leqslant m$便成)，故广义么函数有无穷多个，如使用f'或f^*，那末广义么函数可限于么函数I便够了(因这时一切迭置均化为(1, 1)及(2*, 1)，所以只用么函数便够)，这时广义么函数不致有无穷多.

常值函数$C_a(x)$还是有无穷多个的，但只要引入

$$O(x)\ (\text{零函数})、\quad Sx\ (\text{后継函数}),$$

则一切常值函数均可表出了. 由于零函数与后继函数可表示常值函数，因此今后便把广义么函数、零函数及后继函数三者合称**本原函数**. 本原函数在今后的討論中起着很大的作用.

习　題

1. 試証本节中尙未詳細証明的定理. 特别地，詳細証明定理3的三个推論.

2. 虽然由A而作出A'(或A^*)时必須使用函数pg及(2*, 1)迭置，但由A^*而作A^{**}时却只使用(1, 1)迭置便足够了(須借助于若干个一元函数)，試詳細証明之.

3. 試用$A^{i)}$表$pg(I, A'K^i)$，用$A^{(i}$表$pg(LK^i, A')$(从而$A^{(0}=A^{0)}$). 設任意固定一个i(例如，可固定i为0，或固定i为2，等等)，求証：

(1) 在A'、A^*、$A^{i)}$、$A^{(i}$四者之中，由任意之一可以表出其余三者(把所須利用的函数及迭置明白写出，以下各題同)；

(2) 由$A^{(i}$及$B^{(i}$可作出$(AB)^{(i}$(当A为一元时)，或由$A^{(i}$及$B_1^{(i}, \cdots, B_m^{(i}$可作$(A(B_1, \cdots, B_m))^{(i}$(当$A$为$m$元时)；

(3) 由$A^{i)}$及$B^{i)}$可作出$(AB)^{i)}$，由$A^{i)}$及$B_1^{i)}, \cdots, B_m^{i)}$可以作出$(A(B_1, \cdots, B_m))^{i)}$；

(4) 試再任意固定异于i的另一数j，試証：$A^{(i}$、$A^{(j}$、$A^{i)}$、$A^{j)}$四者之中由其一可定义其余三者.

4. 設M、N均由I、K、L迭置而得，且N非M的尾部(即M不能表成QN之形)，求証：利用若干函数及迭置(詳細指出它)后，$pg(M, AN)$与$pg(K, AL)$可互相定义.

5. 設M、N、Q均由I、K、L迭置而得，且无一函数为另一函数的尾

部,求証

$$pg^2MNQ, \quad pg(M, pg(N, Q))$$

的每一个,均可与 $pg^*(=pg(L, pg(LK^2, LK)))$ 互相定义(在若干函数与迭置的配合下).

6. 如果 $K1=0$ 成立, 試由

$$pg(LK, KL), \quad pg(I, SO), \quad pg(K+KL, I)$$

而定义下列各函数:

(1) $pg(L, I)$;

(2) $pg(K+KL, L^3)$;

(3) $pg(SO, L)$;

(4) $pg(SK, L)$;

(5) $pg(O, L)$;

(6) $pg(L, K)$;

如再允許用 $pg(N^2KL \cdot K, L)$, 試定义

(7) $pg(SL, K)$;

(8) $pg(N^2KSL \cdot K, SL)$.

7. 尽管 $pg(K, L)=I$ 并非对每种配对函数均成立, 但是, 对任何配对函数組恒有

$$pg(K, L)pg(M, N)=pg(M, N),$$

$$pg(M, N)pg(K, L)=pg(M, N),$$

对第二式还須假定 M、N 只以 K、L 之一为最末字母.

第二章 算　子

§1 摹状算子与求逆算子

本章准备对算子作进一步的研究，为此，须再介紹两类很重要的、应用很广的算子：摹状算子与递归算子．本节先介紹前一种，后一种将在下节内介紹．

通常把定义一函数的方法分成显式定义及隐式定义两种．所謂隐式定义，是指利用已知函数作成一个方程（代数方程或微分方程或别的方程），再由該方程而定义一个新函数的方法．例如利用减法与乘法可作出方程

$$y^3-x^5=0,$$

再由該方程解出 y．根据数学知識可知，在实数范圍内，任給一个 x 恒有一个也只有一个 y 满足該方程．因而該方程式便把 y 确定为 x 的一个函数，即 $\sqrt[3]{x^5}$；用数理邏輯中的記号亦可把該函数記为 $\iota y(y^3-x^5=0)$．

当然，隐式定义并不限于只用方程定义新函数，也可以使用任意一个条件来定义新函数．事实上，任給一个有关于 y 的条件，其中允許含有别的变元（例如 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 等），可記为 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$．利用这条件将可以确定“满足 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 的 y”．如果对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 說来，均有一个也只有一个 y 使得 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 成立，那末“满足 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 的 y”便是唯一地确定的，即它必随 $x_1, \cdots, x_n$ 的确定而确定（一般地，也随 $x_1, \cdots, x_n$ 的改变而改变）．换言之，它便是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数．使用数理邏輯中的記号，該函数可記为 $\iota yA(x_1, \cdots, x_n, y)$．例如，通常对极限的定义是：

給出函数 $f(x)$、一数 a 及一数 l 后，如果：

任給 $\varepsilon>0$，恒有一数 $\delta>0$ 存在，使得只要 $0<|x-a|<\delta$，便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$，

我們便說 l 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 点的极限，記为

$$\lim_{x\to a} f(x)=l.$$

从"任給 $\varepsilon>0$"起，到"$|f(x)-l|<\varepsilon$"止，便是一个含有 l（相当于上面的 y）的条件，該条件中还含有别的变元 f 及 a（相当于上面的 x_1、x_2）. 因此，通常关于极限的定义，实际上也是一种隐式定义，即利用一个条件来把 l（极限）定义为 f 及 a 的函数.

就通常的数学用語說来，$\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 便是隐式定义. 在数理邏輯中則把 $\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 叫做摹状式，今后我們也把数学中所說的隐式定义叫做**摹状式**.

如果对任何 $x_1, \cdots, x_n$ 說来，均有一个也只有一个 y 滿足 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$，那末便說 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 就 y 具有存在性及唯一性，簡称"$A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 就 y 滿足存在唯一性条件"，这时相应的摹状式 $\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 叫做**正常摹状式**.

正常摹状式在使用上是沒有疑問的，但是：当 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 不滿足唯一存在性条件时能不能使用摹状式 $\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y)$？如使用又該怎样使用？

当 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 不滿足存在唯一性条件时，不外两种情况：其一，有 y 但不止一个 y 使 A 成立；其二，根本沒有 y 可以使 A 成立.

对于第一种情况，一般都添加一些新条件，使得同时滿足原条件 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 及新条件的 y 有一个也只有一个，这样便可利用合并条件来进行隐式定义了. 例如，在实数域中，滿足 $x^2-2=0$ 的数不止一个，我們便附加条件"$x>0$"，这时滿足"$x^2-2=0$ 且 $x>0$"的 x 便有一个也只有一个了，我們便用 $\sqrt{2}$ 表示这个根（这便是数学中定义算术根的方法）. 又如滿足微分方程的函数通常

不止一个，我們便附加条件（所謂初始条件或边界条件）以使其根唯一.

当然，这种办法未必經常可以实施. 在数学中当无法区别某方程的各根时，常常合并討論而不勉强区别什么主根或非主根. 不过，在递归函数論中，我們是有一个固定的很簡便的方法来添加条件以保証唯一性的. 我們知道，只要有 y 使 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 成立，則在这样的 y 中必有最小的一个（这便是有名的**最小数原理**）. 因此，只要有 y 使 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 成立，那末便有一个也只有一个 y 使

$$\text{“}A(x_1, \cdots, x_n, y) \text{ 且 } y \text{ 最小”}$$

成立，亦即使下式成立：

$$\text{“}A(x_1, \cdots, x_n, y)\text{，且如 } y^* < y \text{ 則非 } A(x_1, \cdots, x_n, y^*)\text{”}.$$

換句話說，如果找的是最小根，那末在递归函数論中，只要一条件有根，那末它便有唯一（的最小）根. 根据数理邏輯中的习惯記法，可用 $\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 表示使 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 成立的最小的 y. 如果任給 $x_1, \cdots, x_n$，恒有 y（未必唯一）使 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 成立，我們便把 $\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 看作正常摹状式. 換言之，对于 $\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 說来，其正常性只要求 A 滿足存在性条件，不必要求它滿足唯一性条件.

对第二种情况，却較难处理了（不論对一般数学言或对递归函数論言，都是較难处理的）. 由于具体情况的不同，下面給出三种方法：

(1) 当 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 不滿足存在性条件时，拒絕使用 $\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 或 $\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y)$. 因此凡被使用的摹状式都是正常摹状式.

这种态度当然最妥当，絕不会出毛病的，只是太保守了，会丧失許多有用的函数. 尤其是，如果由于 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 只在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 一个地方欠缺存在性，便把整个 $\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 弃

置不用,未免有所不当。

(2) 当 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 不满足存在性条件时,仍然使用相应的摹状式. 但如果没有 y 使 $A(x_1^0, \cdots, x_n^0, y)$ 成立, 便适当地指定一值作为新函数在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 的值(例如,指定 1 作为 0! 的值,在射影几何中指定无穷远点作为两平行綫的交点等等)。

这种补充定义的方法当然很好,但是,一般說来,补充定义后的新函数往往具有很多我們不喜欢的性质(例如,新函数往往是不可計算的). 当出现这种情况时,还是宁可不补充定义。

(3) 当 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 不满足存在性条件时,亦使用 $\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 或 $\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y)$, 但如果没有 y 使 $A(x_1^0, \cdots, x_n^0, y)$ 成立,我們便說新函数在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 处没有定义。例如,数学中通常认为 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义,某些函数在 $x=a$ 处没有极限等等. 这个方法有很多优点,而最大毛病是:这时所討論的函数(所謂部分函数)不能处处有定义,对它們(部分函数)的討論往往較为复杂,初学者是較难接受的.

在本书的前半部分中,我們采用第一种办法,即只使用正常摹状式,到后半部(开始討論部分函数时),我們便用第三种方法. 讀者只須記牢,除非明白声明,否则总是使用正常摹状式。也就是說,必須証明 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 满足唯一存在性条件后才使用 $\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y)$;必須証明 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 满足存在性条件后才使用 $\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y)$.

$A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 并非函数而是"条件",或是含 $x_1, \cdots, x_n, y$ 的語句. 因此 ιy、μy 并不是从旧函数而造新函数的算子,而只是从語句而造函数的"准算子",这点是不够方便的. 对此,下面将加以改进. 注意到每一个語句 A 都对应于一数論函数(即它的特征函数 $\mathrm{ct}\,A$),使得

$$A \text{ 成立} \quad \text{当且仅当} \quad \mathrm{ct}\,A=0.$$

因此,显然有(設把 $\mathrm{ct}\,A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 記为 $a(x_1, \cdots, x_n, y)$):

$$\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y) = \iota y[a(x_1, \cdots, x_n, y) = 0],$$
$$\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y) = \mu y[a(x_1, \cdots, x_n, y) = 0].$$

再注意到方程式 $f(x)=0$ 的根往往又叫做函数 $f(x)$ 的零点(卽：对方程式說来叫做根，对它左端的函数說来則叫做零点)，因此，如果用“$\underset{y}{\mathrm{rtu}}$”表示“唯一的 y 零点”，用“$\underset{y}{\mathrm{rti}}$”表示“最小的 y 零点”，那末又有

$$\iota y A(x_1, \cdots, x_n, y) = \underset{y}{\mathrm{rtu}}\, a(x_1, \cdots, x_n, y),$$
$$\mu y A(x_1, \cdots, x_n, y) = \underset{y}{\mathrm{rti}}\, a(x_1, \cdots, x_n, y).$$

而“$\underset{y}{\mathrm{rtu}}$”及“$\underset{y}{\mathrm{rti}}$”都把旧函数变成新函数，是眞正的算子，它們便叫做**摹状算子**或**(不受限)摹状算子**.

$\underset{y}{\mathrm{rtu}}$、$\underset{y}{\mathrm{rti}}$ 有一特点，它只有作用变元 y 而沒有新添变元，因此当它作用于一元函数 $f(y)$ 时便只能得出数值而得不出函数，故它便是通常所說的泛函(但下文仍把它們叫做算子).

如要求处处有定义且可計算，則不論 $\underset{y}{\mathrm{rtu}}$ 或 $\underset{y}{\mathrm{rti}}$ 都不能无条件使用(必須先証明存在唯一性条件或存在性条件)，因此在遞归函数論中，經常使用另一种摹状算子，卽受限摹状算子. 我們知道，

$$A(x_1, \cdots, x_n, y) \quad \text{或} \quad y=u$$

必滿足存在性条件(至少有一 y 根为 u)，亦卽下函数必有 y 零点：

$$a(x_1, \cdots, x_n, y)\cdot(y \dot{-} u),$$

因此，对它們必可使用 μy 或 $\underset{y}{\mathrm{rti}}$ 而得：

$$\mu y(A(x_1, \cdots, x_n, y) \quad \text{或} \quad y=u),$$
$$\underset{y}{\mathrm{rti}}[a(x_1, \cdots, x_n, y)\cdot(y \dot{-} u)].$$

后者記为 $\underset{y\to u}{\mathrm{rti}}\, a(x_1, \cdots, x_n, y)$. $\underset{y\to u}{\mathrm{rti}}$ 便叫做**受限摹状算子**或**受限(于 u 的)摹状算子**.

$\underset{y\to u}{\mathrm{rti}}$ 是可以无条件使用的，卽不論 $f(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是什么样的函数，均可实施 $\underset{y\to u}{\mathrm{rti}}$ 而得一个新函数，无須先作唯一存在性証明，也无須先作存在性証明.

定理 如果 $f(x_1, \cdots, x_n, y)$ 在 u 以下有 y 零点，則 $\underset{y\to u}{\mathrm{rti}} f(x_1,$

$\cdots, x_n, y)$恰巧等于$f(x_1, \cdots, x_n, y)$的最小y零点;如果$f(x_1,\cdots, x_n, y)$在u以下沒有y零点,则$\operatorname*{rti}\limits_{y\to u} f(x_1, \cdots, x_n, y)$与$u$相等.

这定理是$\operatorname*{rti}\limits_{y\to u} f(x_1, \cdots, x_n, y)$的一切性质的根据. 由这定理可知,如果$\operatorname*{rti}\limits_{y\to u} f(x_1,\cdots,x_n,y)=a$而$a<u$,则$f(x_1,\cdots,x_n,y)$必在$u$以下有$y$零点,且最小$y$零点便是$a$. 如果$\operatorname*{rti}\limits_{y\to u} f(x_1, \cdots, x_n, y)=u$,则$f(x_1, \cdots, x_n, y)$有沒有$y$零点不可知,但如果有$y$零点的話,它必不会小于$u$.

还用$\operatorname*{rtu}\limits_{y\to u} f(x_1, \cdots, x_n, y)$表示$f$在$u$以下的唯一$y$零点,用$\operatorname*{rta}\limits_{y\to u} f(x_1, \cdots, x_n, y)$表示$f$在$u$以下的最大$y$零点(如果存在的話),否则$\operatorname*{rtu}\limits_{y\to u} f$及$\operatorname*{rta}\limits_{y\to u} f$可随意指定(或指定为$u$,或指定为0,或指定为别的固定的函数;为統一起見,本书中約定:当在u以下$f(x)$无零点时,$\operatorname*{rtu}\limits_{x\to u} f(x)$及$\operatorname*{rta}\limits_{x\to u} f(x)$均指$u$).

此外,又引入下列的**求逆算子**:

$$\operatorname*{inv}\limits_{y\to u} f(x_1, \cdots, x_n, y) \text{ 表 } \operatorname*{rti}\limits_{y} [f(x_1, \cdots, x_n, y) \doteq u], \tag{1}$$

$$\operatorname*{\widehat{inv}}\limits_{y\to(m,u)} f(x_1, \cdots, x_n, y) \text{ 表 } \operatorname*{rti}\limits_{y\to m} [f(x_1, \cdots, x_n, y) \doteq u], \tag{2}$$

unv 及 $\widehat{\text{unv}}$ 仿此(只須把“rti”改为“rtu”). $\operatorname*{inv}\limits_{y\to u} f(y)$表示使$f(y)$取值$n$的那个最小的$y$. 因此卽得:

$$\operatorname*{rti}\limits_{y} f(x_1, \cdots, x_n, y) = \operatorname*{inv}\limits_{y\to 0} f(x_1, \cdots, x_n, y). \tag{3}$$

从(1)、(3)看来,inv 与 rti 可互相表示;但細究起来,用 rti 表示 inv 时,須多容許一个参数(見(1))u,且須借助于新函数“$\doteq$”(或 eq),用 inv 表示 rti 时,既无須新添参数也无需借助于新函数.

当f无参数时,$\operatorname*{unv}\limits_{t\to x} f(t)$卽通常的$f^{-1}(x)$;当有参数$u$时,$\operatorname*{unv}\limits_{t\to x} f(u, t)$亦可勉强写为$f_u^{-1}(x)$.

习　题

1. 指出下列摹状式沒有定义的情形. 当有定义时,試将它們表成熟知的函数:

(1) $\operatorname*{rti}\limits_{y} (x \dot{-} y \cdot t)$;

(2) $\underset{t}{\mathrm{rti}}\,(x\dot{-}(t+t))$;

(3) $\underset{t}{\mathrm{rti}}\,(x\dot{-}t\cdot t)$;

(4) $\underset{t\to n}{\mathrm{rti}}\,(x+t\ddot{-}y)$;

(5) $\underset{t}{\mathrm{rti}}\,N\mathrm{rs}(x,\ 10^t)$;

(6) $\underset{t}{\mathrm{rti}}\,(x\dot{-}10^t)$;

(7) $\underset{t\to a+b}{\mathrm{rti}}\,(a\dot{-}bt\dot{-}t^2)$.

2. 試用 $\underset{y\to u}{\widetilde{\mathrm{rti}}}\,f(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y)$ 表示:

当 f 在 u 以下有 y 零点时,則指最小 y 零点;

当 f 在 u 以下无 y 零点时,則指 $b(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ n)$ (函数 b 預先固定),

試証:

$$\underset{y\to u}{\mathrm{rti}}\,f(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y)=\underset{y\to u}{\widetilde{\mathrm{rti}}}(f(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y)\cdot(y\ddot{-}n)).$$

反之,利用 rti 亦可以定义 $\widetilde{\mathrm{rti}}\,f(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y)$.

3. 試証 $\underset{y\to u}{\mathrm{rta}}\,f(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y)=u\dot{-}\underset{y\to u}{\mathrm{rti}}\,f(x_1,\cdots,x_n,u\dot{-}y)$ (当有零点时).

4. 試求 $\underset{t}{\mathrm{rti}}\,g^t(x)$. 如不易求其显式,則求当 $x\leqslant 100$ 时, $\underset{t}{\mathrm{rti}}\,g^t(x)$ 的最大值(先求 $a=1$ 的情形).

(1) $g(x)=E_ax$; (2) $g(x)=L_ax$; (3) $g(x)=\overline{L}_ax$; (4) $g(x)=\widetilde{L}_ax$.

5. 試証:

(1)
$$\begin{aligned}\mu y[f_1(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)=f_2(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)]\\ =\underset{y}{\mathrm{rti}}[f_1(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)\ddot{-}f_2(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)]\\ =\underset{y}{\mathrm{rti}}\ \mathrm{eq}(f_1(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y),\ f_2(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y));\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\mu y[f_1(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)\leqslant f_2(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)]\\ =\underset{y}{\mathrm{rti}}(f_1(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)\dot{-}f_2(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)).\end{aligned}$$

§2 遞归算子

遞归算子可說是原始复迭式与迭函算子的推广.

試就原始复迭式而論,当給出一函数 $f(x)$ 后,可利用原始复迭式而造出下列函数(命 $g(u,\ x)=\underset{t\to(u,x)}{\mathrm{itr}}\,f(t)$):

$$g(u,\ 0)=u,$$

$$g(u,\ 1)=f(u),$$

$$g(u,\ 2)=ff(u),$$

$$g(u,\ 3)=fff(u),\quad \text{等等.}$$

当然，$f(x)$ 中可另有参数，这时 $g(u,\ x)$ 亦依赖于这些参数．但有一重要的特点是："f"始終是一样的．假設使用不同的 $f(x)$，例如設有一序列函数 $f_v(x)$，那末可造下函数：

$$g(u,\ 0)=u,$$
$$g(u,\ 1)=f_0(u),$$
$$g(u,\ 2)=f_1f_0(u),$$
$$g(u,\ 3)=f_2f_1f_0(u),\quad \text{等等.}$$

这时 g 便不是对 $f_v(x)$ 使用原始复迭式而得，而是使用一种新型算子(原始递归式)而得了．

可把 $f_v(x)$ 合并成一个二元函数 $f(v,\ x)$，那末，所造的 $g(u,\ x)$ 便滿足下列条件：

$$\begin{cases} g(u,\ 0)=u, \\ g(u,\ Sx)=f(x,\ g(u,\ x)) \quad (\text{右端相当于 } f_x g(u,\ x)), \end{cases}$$

如果把 f 中的参数标明出来，那便是：

$$\begin{cases} g(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u,\ 0)=u, \\ g(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u,\ Sx)=f(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ x,\ g(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u,\ x)), \end{cases} \tag{1}$$

这便是**原始递归式的标准形式**．

注意：这个定义式不是显式定义，因为凡显式定义式的右端中只能出現已經定义过的函数，絕不能出現正待定义的函数；而原始递归式第二式右端却出現待定义的函数 $g(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u,\ x)$，与显式定义的要求相違背．其次，原始递归式也非隐式定义(至少不是上面所討論的那种隐式定义)，因为隐式定义必能表成

$$\underset{y}{\mathrm{rti}}\, A(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u,\ x,\ y)$$

之形，但原始递归式所定义的 $g(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u,\ x)$ 却有三个不同的填式(即 $g(t_1,\cdots,\ t_r,\ u,\ 0)$，$g(t_1,\cdots,\ t_r,\ u,\ Sx)$，$g(t_1,\cdots,t_r,u,x)$ 三者)出現在上列方程組中，不能把这三个填式都改成同一变元符号"y"，因为，如果把上方程改写成

$$g(t_1, \cdots, t_r, u, x) = \underset{y}{\mathrm{rti}}\,[(y \dot{-} u) + (y \dot{-} f(t_1, \cdots, t_r, x, y))],$$

这时，或者右端的摹状式的根不存在，或者其根为"u"本身，与原始递归式的原意相离太远.

易見，尽管原始递归式第二式的右边又出現了被定义的函数 $g(t_1, \cdots, t_r, u, x)$，但却能对 $(t_1, \cdots, t_r, u, x)$ 的每一組变元而計算出函数 g 的値. 事实上，由第一定义式可得 $g(t_1, \cdots, t_r, u, 0)$ 的值(即 u)，既知 $g(t_1, \cdots, t_r, u, 0)$ 之値，由第二定义式即可計算出 $g(t_1, \cdots, t_r, u, 1)$ 的値，既知 $g(t_1, \cdots, t_r, u, 1)$ 的値，那么仍由第二定义式又可計算出 $g(t_1, \cdots, t_r, u, 2)$ 的値，……，如此类推. 还可用数学归納法把这事实严格証明如下.

定理 1 如果旧函数处处有定义且可計算，則由原始递归式所定义的函数是处处有定义且处处可計算的.

証明 依 x 而归納.

奠基： $g(t_1, \cdots, t_r, u, 0)$ 显然有定义且可計算，因其値恰与 u 相同.

归納： 討論情形 Sx. 有：

$$g(t_1, \cdots, t_r, u, Sx) = f(t_1, \cdots, t_r, x, g(t_1, \cdots, t_r, u, x)),$$

依归納假設，$g(t_1, \cdots, t_r, u, x)$ 处处有定义且可計算，又 f 处处有定义且可計算，故知 $g(t_1, \cdots, t_r, u, Sx)$ 也处处有定义且可計算.

故依数学归納法，本定理得証.

还可指出，通常所說的**原始递归式的标准式**不是我們上述那种，而是下列的一种：

$$\begin{cases} h(t_1, \cdots, t_r, u, 0) = A(t_1, \cdots, t_r, u), \\ h(t_1, \cdots, t_r, u, Sx) = B(t_1, \cdots, t_r, u, x, h(t_1, \cdots, t_r, u, x)). \end{cases} \tag{2}$$

这种递归式比上面所使用的要广泛一些，因为当限定 $A(t_1, \cdots, t_r, u)$ 为 u 而且限定 B 中不含 u 时便得出上面的递归式来了.

定理 2 如果利用原始递归式(2)，从函数 A 及 B 而作函数 h,

那末亦可利用原始递归式(1)及迭置,从 A、B 而作 h.

証明 既有 A、B 后,可先利用原始递归式(1)作

$$\begin{cases} l(t_1, \cdots, t_r, t_{r+1}, v, 0) = v, \\ l(t_1, \cdots, t_r, t_{r+1}, v, Sx) = B(t_1, \cdots, t_r, t_{r+1}, x, l(t_1, \cdots, t_{r+1}, v, x)), \end{cases} \tag{3}$$

由 l 及 A 作迭置得

$$l(t_1, \cdots, t_r, u, A(t_1, \cdots, t_r, v), x),$$

今用数学归納法証明:

$$h(t_1, \cdots, t_r, u, x) = l(t_1, \cdots, t_r, u, A(t_1, \cdots, t_r, u), x).$$

奠基: 当 $x=0$ 时左右两端均变为 $A(t_1, \cdots, t_r, u)$, 故断語成立.

归納: 当 $x+1$ 时,有:

$$\begin{aligned} &h(t_1, \cdots, t_r, u, Sx) \\ &= B(t_1, \cdots, t_r, u, x, h(t_1, \cdots, t_r, u, x)) && (\text{由(2)的第二式}) \\ &= B(t_1, \cdots, t_r, u, x, l(t_1, \cdots, t_r, u, A, x)) && (\text{归納假設}) \\ &= l(t_1, \cdots, t_r, u, A, Sx). && (\text{由(3)的第二式}) \end{aligned}$$

故証得了归納步驟,从而本断語得証.

既証得了本断語,定理 2 也就得証了.

注意: (3)的第二式右端 B 的变元中不出現 v, 这正是原始递归式的标准式所要求的,也是本証明所以能够进行的主要关鍵.

以后,在理論性探討时,均使用原始递归式(1),并把由(1)所造的函数 g 記为

$$g(u, x) = \underset{(t, y)\to(u, x)}{\mathrm{rec}} f(t, y)$$

或

$$g(t_1, \cdots, t_r, u, x) = \underset{(t, y)\to(u, x)}{\mathrm{rec}} f(t_1, \cdots, t_r, t, y).$$

这里 t、y 为作用变元(**递归变元**),而 u、x 为新添变元, $t_1, \cdots, t_r$ 則为参数. u 有时叫**初値变元**,而 x 也常叫**递归变元**或**新添递归变元**.

今后还要把原始递归加以推广.

显然，由原始递归式所定义的函数之所以处处有定义且可計算，完全是由于下列的事实：試把待定义的新函数 $g(t_1,\cdots,t_r,u,x)$ 的变元依照最后一变元的变值的大小而排序：即把变元 $(t_1,\cdots,t_r,u,x)$ 看作在变元 $(t_1,\cdots,t_r,u,Sx)$ 之前，那末原始递归式的第一式告訴我們如何直接求出待求函数在"最前的变元"处之値，原始递归式第二式則告訴我們，如何由待求函数在"前一个变元"处的値而求出它在"后一个变元"处的値. 因为任何一个变元，只要从它逐步向前追溯，必可追溯到"最前"一个变元，或者由"最前"一个变元逐步順推，必可推到所給的任一变元，因此待求函数在所給的任一变元处的値必可求出.

但是，变元的"前后"是可以用各种方法指定的，不必一定以其中某一变元的变値大小为标准. 下面将介紹各种排序方法，并将証明，根据对变元的任何一种排序方法所作的递归式，它所定义的函数均可改用根据下列这种排序方法而作的递归式来定义.

如果函数 $g(u,x)$ 具有性质：对于任何 x，恒有一数 m，使得

$$g_u^m(x)=0\ (\text{即}\ \underset{t\to(x,m)}{\mathrm{itr}}\ g(u,t)=0).$$

(g^m 表示用 g 复迭 m 次). 我們便説 $g(u,x)$ 对 x 是**归宿于 0 的函数**，或簡称**归宿函数**. 具这样性质的最小的 m 叫做 ***g* 在 *x* 处的归宿步驟**，可記为 $\underset{t\to x}{\mathrm{stp}}\ g(u,t)$. 算子 stp 叫做**归宿步驟式**. 由于承认 $g_u^0(x)=x$，显見 g 在 $x=0$ 处(也只在 $x=0$ 处)的归宿步驟为 0，即 $\underset{t\to 0}{\mathrm{stp}}\ g(u,t)=0$.

任給一函数 $g(u,x)$，按 $g(u,x)$ 可对变元 $(t_1,\cdots,t_r,x)$ 排序：$(t_1,\cdots,t_r,0)$ 最前，其次，$(t_1,\cdots,t_r,g_u(x))$ 在 $(t_1,\cdots,t_r,x)$ 之前(因而 $(t_1,\cdots,t_r,g_u^{n+1}(x))$ 便在 $(t_1,\cdots,t_r,g_u^n(x))$ 之前). 如果根据这两关系还不能决定一切变元之間的前后，則对别的变元之間的前后可任意規定(例如，可由最后一变元的变値大小而确定). 既把各变元的前后关系确定了，便可以引进一种新型的递归式.

定义 由 $f(t_1, \cdots, t_r, x, y)$ 及 $g(t_1, \cdots, t_r, x)$ 根据下列式子(4)而引进新函数 h 的方法叫做**半(部分)递归式**；如果 $g(t_i, x)$ 对 x 为归宿(于 0 的)函数,特称之为**一般**(或**有序**)**递归式**：

$$\begin{cases} h(t_1, \cdots, t_r, u, 0) = u, \\ h(t_1, \cdots, t_r, u, Sx) = f(t_1, \cdots, t_r, x, h(t_1, \cdots, t_r, g(t_1, \cdots, t_r, Sx)) \end{cases} \tag{4}$$

所定义的 h 可記为(其中 t_i 为 $t_1, \cdots, t_r$ 的縮写)：

$$h(t_1, \cdots, t_r, u, x) = \underset{(t, y) \to (u, x)}{\text{reg}} (g(t_i, t), f(t_i, t, y)).$$

显然,給任一組变值 $(t_1, \cdots, t_r, u, x)$, 如果 $x=0$, 由第一式可求出 h 在該变元处之值;如果 $x \neq 0$, 則只要由第二式向前追溯 $m(=\underset{t \to x}{\text{stp}}\, g(t))$ 次, 便可化归为 $h(t_1, \cdots, t_r, u, 0)$ 的計算, 从而便可以計算其值了. 所应注意的是:这里与原始递归式情形不同,这里只能由所給变元向前追溯,不能由开始值向下順推,因为还不知道从 0 起如何逐步順推而达到所給的变值 x (除非先做 x, $g(x)$, $g^2(x)$, $\cdots$, $g^m(x)=0$, 但这实质上仍是由 x 向前追溯). 这式的可計算性在直覚上虽很明显, 但由于变元的排序与自然数的排序并不一致,因此要严格証明它也非易事,須利用适当的技巧.

定理 3 如果 $f(t_1, \cdots, t_r, x, y)$ 是处处可計算的, 而 $g(x)$ 又是归宿于 0 的函数,那末把一般递归式(4)作用于 f 及 g 所得的函数 $h(t_1, \cdots, t_r, x, y)$ 也是处处可計算的.

証明 設任給一变值 (u, x) (这里把参数 $t_1, \cdots, t_r$ 省略不写), 首先証明:对任何自然数 k (这里 $k \leqslant m(x)$) 說来, $h(u, g^{m(x) \dot{-} k}(x))$ 永是可計算的,这里 $m(x)$ 表示 $\underset{t \to x}{\text{stp}}\, g(t)$.

如果 $x=0$, 則 $m(0)=0$, 故 $m(0) \dot{-} k=0$. 而 $g^0(0)=0$, 显然 $h(u, 0)$ 是可計算的. 定理成立.

其次,設 $x \neq 0$, 对 k 用归納法来証明.

奠基: $k=0$ 时, $h(u, g^{m(x) \dot{-} 0}(x)) = h(u, 0)$, 它显然可計算.

归納: 討論情形 $k+1$. 因 $m(x) \dot{-} (k+1) < m(x)$, 故

$g^{m(x)\dot{-}Sk}(x)\neq 0$. 由第二式得

$$h(u,\ g^{m(x)\dot{-}Sk}(x))=f(x,\ h(u,\ gg^{m(x)\dot{-}Sk}(x))).$$

依假設，$Sk\leqslant m(x)$，故 $m(x)\dot{-}k>0$，因此

$$gg^{m(x)\dot{-}Sk}(x)=g^{SD(m(x)\dot{-}k)}(x)=g^{m(x)\dot{-}k}(x),$$

再得

$$h(u,\ g^{m(x)\dot{-}Sk}(x))=f(x,\ h(u,\ g^{m(x)\dot{-}k}(x))),$$

根据归納假設，右端可以計算，故左端亦然.

依数学归納法，本断語得証.

在特例，令 $k=m(x)$，則 $h(u,\ g^{m(x)\dot{-}m(x)}(x))$ 可計算，卽 $h(u,x)$ 可計算，故本定理得証.

注意：本証明本质上也是拆裂法之一种，讀者可善自体会.

仿原始遞归式那样，也可証明下列定理.

定理 4 如果从 A、B、g 用下式来定义新函数 h：

$$\begin{cases}h(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u,\ 0)=A(t_1,\ \cdots,\ t_r,\ u),\\ h(t_1,\cdots,t_r,u,Sx)=B(t_1,\cdots,t_r,u,x,h(t_1,\cdots,t_r,u,g(x))),\end{cases}$$

則亦可由一般遞归式(4)及迭置从 A、B、g 而定义 h.

定理 5 归宿步驟式 stp 是一般遞归式的特例.

讀者可自行証之，可参看本节习題第 10 題.

定理 6 原始遞归式是一般遞归式的特例，具体說来，

$$\underset{(t,y)\to(u,x)}{\mathrm{rec}} f(t_i,\ t,\ y)=\underset{(t,y)\to(u,x)}{\mathrm{reg}}(Dt,\ f(t_i,\ t,\ y)).$$

讀者可自証之.

一般遞归式中的 $g(x)$ 必須是归宿函数，因此由一般遞归式所作的函数必是处处有定义且可計算的（只須旧函数处处有定义且可計算）. 如果放弃这个要求，那末由遞归式(4)所定义的函数便未必处处有定义(卽使 g 及 f 处处有定义)，这时遞归式(4)便是部分遞归式或半遞归式. 由部分遞归式或半遞归式所造的函数 h，它在 $(u,\ x)$ 有定义且可計算当且仅当 g 在 x 处归宿于 0(这里假定 g 及 f 是处处有定义且可計算的).

在以后的大多数情形下，均使用一般递归式．因此除非明白指出，否则永远假定递归式(4)中的 g 是归宿函数．显然，半递归式相当于一般的(未必正常的)幕状式，而一般递归式相当于正常幕状式．有关正常性的要求和約定在这里同样适用．

习　题

試把下列递归式的通常写法写出，如可能并把所定义的函数表成熟知函数的显式：

1. $\underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} 0,\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} 1,\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} v,\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} Ny,\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} tNy.$

2. $\underset{(t,y)\to(0,x)}{\mathrm{reg}} (Ot, I_{21}(t,y)),\quad \underset{(t,y)\to(u,x)}{\mathrm{reg}} (Ot, Oy).$

3. $\underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} (y+1),\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} (y+v),\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} (y+t),$

   $\underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} (y+t^2),\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} (y+t(t+1)).$

4. $\underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} a\cdot y,\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} y\cdot St,\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} y\cdot(x+1)(x+2).$

5. $\underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{rec}} (3y+4x),\quad \underset{(t,y)\to(x,u)}{\mathrm{ree}} (ay+bx).$

求証下列各函数为归宿函数，如可能試将其归宿步驟求出，不易求者可只求在 $x=20$ 处的归宿步驟．

6. $g(x)=\begin{cases} x\dot{-}1, & \text{当 } x\leqslant 3 \text{ 时},\\ x+2, & \text{当 } x>3 \text{ 且非平方数时},\\ \sqrt{x}, & \text{当 } x>3 \text{ 且为平方数时}. \end{cases}$

7. $g(x)=\begin{cases} 2x, & \text{当 } x \text{ 为 3 的倍数但非 2 的倍数时},\\ 3x, & \text{当 } x \text{ 为 2 的倍数但非 3 的倍数时},\\ \left[\dfrac{x}{6}\right], & \text{当 } x \text{ 为 6 的倍数时},\\ 6\left[\dfrac{x}{6}\right]\dot{-}1, & \text{此外}. \end{cases}$

8. $g(x)=\begin{cases} x+2, & \text{当 } x \text{ 非 2 的方幂也非 3 的方幂时},\\ \lg_2 x, & \text{当 } x \text{ 为 2 的方幂时},\\ \lg_3 x, & \text{当 } x \text{ 为 3 的方幂时}. \end{cases}$

9. 試用数学归納法証明：如果 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，且 $g(x,y)$ 至少对 y 递增，则

$$\underset{(x,y)\to(n,u)}{\mathrm{rec}} f(x,y)\leqslant \underset{(x,y)\to(n,u)}{\mathrm{rec}} g(x,y).$$

10. 試証 $\operatorname*{stp}_{t\to x} g(t_i, t) = \operatorname*{reg}_{(t, y)\to(0, x)} \{g(t_i, t), Sy\}$. 換言之，如果命 $d(x) = \operatorname*{stp}_{t\to x} g(t)$，則有

$$\begin{cases} d(0)=0, \\ dSx = Sd(gSx). \end{cases}$$

11. 試求下列函数的归宿步驟：

(1) $O(x)$;　(2) $N(x)$;　(3) $D(x)$;　(4) $E(x)$.

求出具极大归宿步驟的地方（如在 x 处的归宿步驟比在 x 以前任何地方的归宿步驟均大，則 x 叫做**具极大归宿步驟的地方**）.

§3 算子的分类

要对算子作进一步的研究，还須对算子作适当的分类.

首先，可把算子分成各种**型**，(s, m, n)**型**算子 α 是把 s 个 m 元函数 f_h 变成一个 n 元函数 g 的算子，可記为 $g(y_i) = \operatorname*{\alpha}_{(x)\to(y)} \{f_1(x_i), \cdots, f_s(x_i)\}$. 为簡单起見，下文只就 $(1, 1, 1)$ 型算子討論，对一般的 (s, m, n) 型算子，也可同法去討論.

其次，可把算子分成能行的算子、半能行的算子以及非能行的算子三者，这三者之間的区别可用下列例子說明.

設有算子 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y}$. 如果对每个 $f(x)$ 及每个 y，$\operatorname*{\alpha}_{x\to y} f(x)$ 有定义或否永可在有限步驟內判知，則 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y}$ 叫做**能行算子**. 这时，即使 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y} f(x)$ 未必处处有定义，但給出 $f(x)$ 及 y 后，$\operatorname*{\alpha}_{x\to y} f(x)$ 有定义与否既是永可在有限步驟內判知，我們可約定：凡当 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y} f(x)$ 无定义时即可指定其値为 0（或别的預先固定的函数 $b(y)$），这样永可把 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y} f(x)$ 补全而不丧失其可計算性. 今后我們永远这样做，从而能行算子必是处处有定义的.

例如，复迭算子、迭函算子、原始递归算子以及受限摹状算子 $(\operatorname*{rti}_{x\to y})$ 便都是能行算子. 当 $f(x)$ 在 y 以下沒有零点时，$\operatorname*{rti}_{x\to y} f(x)$ 表示"y"，这便是对未必处处有定义的能行算子补全定义的例子.

如果 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y}$ 未必处处有定义，同时也不能保証当給出 y 及 $f(x)$ 后，永能在有限步驟內判定 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y} f(x)$ 有定义或否，則 $\operatorname*{\alpha}_{x\to y}$ 便不是能行

的算子．这时又分两情形．

$\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 未必处处有定义；但只要 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 有定义，它的值必能求出，这时 $\underset{x\to y}{\alpha}$ 叫做**半能行算子**．

当 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 无定义时其值既是不存在的，当然无須計算；反之，只要 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 存在，其值永能計算出，因此半能行算子本质上与能行算子一样．但是，对 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 說来，須計算哪些值、无須計算哪些值（因它們不存在）？这却是无法知道的，从而很可能有人白費精力地去計算那些根本不存在的“值”．这又是半能行算子与能行算子的不同之点．因此“半能行”的名称是很恰当的．

例如，对于 $\underset{x}{\mathrm{rti}} f(x)$、$\underset{x}{\mathrm{rtu}} f(x)$，只要它們有定义，便必能在有限步驟內求出其值．但它們有定义或否（即 $f(x)$ 有零点或否，有唯一零点或否）却不能在有限步驟內判定，故 $\underset{x}{\mathrm{rti}}$ 及 $\underset{x}{\mathrm{rtu}}$ 便是半能行算子．

$\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 固然未必处处有定义，即使有定义也未必能够在有限步驟內求出其值，这时 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 叫做**非能行算子**．

設用 $\underset{x}{\mathrm{rta}} f(x)$ 表 $f(x)$ 的最大零点，它是否有定义（即 $f(x)$ 具有有限个零点或否）固然未必可以判定，即使知道它有定义（即使知道 $f(x)$ 只有有限个零点），也无法保証恒可找出 $\underset{x}{\mathrm{rta}} f(x)$ 之值（因各零点的上界未必可以求出），因此 $\underset{x}{\mathrm{rta}}$ 便是非能行算子．

非能行算子缺乏可計算性，故不在本书討論范圍之內．因此，今后将仅討論能行算子及半能行算子．

对能行算子，又可分为高等、初等两种．对此，先引进“模”的概念．

設有算子 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$，当給出 y 及 $f(x)$ 后，如果 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 有定义且能求出其值，換言之，能在有限步驟內求出其值，則在有限步驟內所使用的 f 值只能是有限个，設为 $f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_k)$．我們把大于或等于 $\max\limits_{i\to k} a_i$ 的任一数叫做算子 α 的一个**模**．

一般說来，模的最小值是依賴于 y 及 $f(x)$ 的；換言之，应有一

算子 β，使得

$$\max_{i\to k} a_i \leqslant \underset{x\to y}{\beta} f(x),$$

β 便叫做相应于 α 的**模算子**．但在特例，模可以只依赖于 y 而与 $f(x)$ 无关，这时存在一函数 $G(y)$，使得

$$\max_{i\to k} a_i \leqslant G(y),$$

G 可叫做相应于 α 的**模函数**．又在特例，模可以是常数 a，而与 y 及 $f(x)$ 均无关．下面将証明，这时 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 可由 $f(0)$, $f(1)$, $\cdots$, $f(a)$ 作迭置而得（当然，还要借助于别的一些函数），因此 α 便退化为迭置了．

如果相应于能行算子 α 的一个模不依赖于 $f(x)$，即模算子实际上是模函数时，则 α 称为**初等算子**；反之，则 α 称为**高等算子**．

初等算子的例子如：迭函算子 $(G(y)=y)$，受限摹状算子 $(G(y)=y)$．容易験証，当求 $\underset{x\to y}{A} f(x)$ 及 $\underset{x\to y}{\mathrm{rti}} f(x)$ 时，只使用 $f(0)$, $f(1)$, $\cdots$, $f(y)$ 諸 f 值．

高等算子的例子如：$\underset{t\to(u,x)}{\mathrm{itr}}$，原始递归式 $\underset{(x,y)\to(u,n)}{\mathrm{rec}}$．

試就原始复迭式 itr 为例．要計算 $\underset{x\to(u,y)}{\mathrm{itr}} f(x)$，須使用下列諸 f 值：

$$a_0=u,\ f(a_0)=a_1,\ f(a_1)=a_2,\ \cdots,\ f(a_{y-1})=a_y.$$

而 $\max\limits_{i\to y-1} a_i$ 显然随 f 而更改，不能只靠 y 来决定，故 itr 为高等算子．

再就原始递归式 rec 来討論．要計算 $\underset{(x,y)\to(u,n)}{\mathrm{rec}} f(x, y)$，須使用下列諸 f 值：

$$b_0=u,\ f(0,\ b_0)=b_1,\ f(1,\ b_1)=b_2,\ \cdots,\ f(n-1,\ b_{n-1})=b_n.$$

这里 f 的第一变元的最大变值是 $n-1$，的确与 f 无关，但 f 的第二变元的最大变値为

$$\max_{i\to n-1} b_i,$$

它显然随 f 而更改，不能只靠 n、u 来决定，故 rec 也是高等算子．

模函数可看作模算子的特例，故初等算子也是高等算子的特例．

由于初等算子最簡单，因此希望尽量得出更多的初等算子，希望尽可能使用初等算子来代替高等算子或半能行算子（乃至非能行算子）．下面列举的是經常使用的一个方法．

任給一个算子 α，我們用

$$\underset{x\to(u,y)}{\hat{\alpha}} f(x) \quad 表示 \quad \underset{x\to y}{\alpha} f(\min(x, u)),$$

$$\underset{(x,y)\to(u,n,v)}{\hat{\alpha}} f(x, y) \quad 表示 \quad \underset{(x,y)\to(n,v)}{\alpha} f(\min(u, x), \min(u, y)),$$

等等，則 $\hat{\alpha}$ 叫做 α 的**加限算子**，更明确些可說成：α 的加限于 u 的算子．

加限算子 $\hat{\alpha}$ 的意义是：把 $\hat{\alpha}$ 作用于 f 的結果基本上和把 α 作用于 f 的結果一致，但当使用 $f(t)$ $(t>u)$ 值时，必須把"$f(t)$"換为"$f(u)$"．

显然，相应于加限算子 $\hat{\alpha}$ 的模可只依賴于 u 而与 f 无关．但只当 $\hat{\alpha}$ 为能行算子时，才称 $\hat{\alpha}$ 为初等算子；当 $\hat{\alpha}$ 为半能行算子或非能行算子时，$\hat{\alpha}$ 仍不能叫做初等算子．

因此，易得：高等算子的加限算子必是初等算子；至于半能行算子及非能行算子的加限算子，則可以是初等算子，也可以不是初等算子．

最重要的一些加限算子是 $\underset{x\to u}{\widehat{\mathrm{rti}}}$、$\underset{x\to u}{\widehat{\mathrm{rtu}}}$、$\underset{x\to u}{\widehat{\mathrm{rta}}}$，它們都是初等算子．当我們补全定义（当沒有零点时則指 u）后它們便是上面所使用的 $\underset{x\to u}{\mathrm{rti}}$、$\underset{x\to u}{\mathrm{rtu}}$、$\underset{x\to u}{\mathrm{rta}}$．

原始递归式的加限算子 $\underset{(x,y)\to(u,n,v)}{\widehat{\mathrm{rec}}}$ 也是初等算子，它也很重要．

对半递归式及归宿步驟式也有加限算子 $\underset{(x,y)\to(u,n,v)}{\widehat{\mathrm{reg}}}$、$\underset{x\to(u,y)}{\widehat{\mathrm{stp}}}$，它們也是初等算子，讀者可自行驗証．

习　題

1．根据模算子的概念，試証：相应于非能行算子的模算子必是非能行的；相应于半能行算子的模算子必是半能行的；相应于能行算子的模算子必

是能行的.

2. 試証下列加限算子的确是初等算子:

$$\widehat{\mathrm{rti}}_{x\to y},\quad \widehat{\mathrm{rtu}}_{x\to y},\quad \widehat{\mathrm{rta}}_{x\to y},\quad \widehat{\mathrm{reg}}_{(x,y)\to(u,n,v)},\quad \widehat{\mathrm{stp}}_{x\to(u,y)}.$$

3. 求証下列算子是非能行算子:

$$\max_x f(x),\quad \min_x f(x),\quad \sum_x f(x),\quad \prod_x f(x),$$

这里各算子的意义是: 当 x 遍历自然数集而变化时諸 $f(x)$ 的最小值、最大值、諸 $f(x)$ 的和、积. 它們的加限算子是否也是非能行算子?

能否再列举出一些半能行算子及非能行算子?

4. 具体給出相应于(s, m, n)型算子的模算子及模函数的定义.

5. 如果所作出的函数 $\alpha_{x\to y} f(x)$受界于 $g(y)$, 即 $\alpha_{x\to y} f(x)\leqslant g(y)$, 能否說

$$\alpha_{x\to y} f(x)=\hat{\alpha}_{x\to(g(y),y)} f(x)?$$

如能,試証明之; 如不能,試举一反例.

6. (1) 試用 $\sum\limits_{x\to y} f(x)$ 来表示 $\hat{\sum\limits_{x\to(u,y)}} f(x)$;

(2) 試用 $\prod\limits_{x\to y} f(x)$ 来表示 $\hat{\prod\limits_{x\to(u,y)}} f(x)$;

(3) 一般地,能否用 $\widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(u,n,v)} f(x,y)$ 来表示 $\mathrm{rec}_{(x,y)\to(n,v)} f(x,y)$?

但如果 $\mathrm{rec}_{(x,y)\to(n,v)} f(x,y)\leqslant g(n,v)$, 能否用 $\widehat{\mathrm{rec}} f$ 来表示 $\mathrm{rec} f$?

7. 試将下列函数表成熟知函数的显式:

$$\widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(u,n,v)} Ny;\quad \widehat{\mathrm{rec}}_{(a,y)\to(u,n,v)} x+y;\quad \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(u,n,v)} (3x+4y).$$

8. 如果 $f(x, y)$ 对各变元递增,则 $\widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(u,n,8v)} f(x,y)\leqslant f(u,u)$.

§4 算子的相互表示及化归

下面准备討論迭置以及各种算子之間的关系. 仍是只用$(1, 1, 1)$型算子为例来討論,对一般(s, m, n)型算子的討論显然是类似的.

定义 如果从函数 $A_1, \cdots, A_h, f(x)$ 出发, 經过有限次迭置后可以作出函数 $\alpha_{x\to y} f(x)$, 則說算子 α **退化为迭置**, 或更明确些, **借助于函数 $A_1, \cdots, A_h$ 后, α 退化为迭置.**

作为例子,我們討論: 对二元函数 $A(x, y)$ 說来, $A_{x\to y} f(x)$ 退化为迭置的必要充分条件是什么?

定理 1 如果对于任何 u 及 A 的值域中的元素 y, 永有下列两等式之一:

(1) $A(y, u)=Hy$, (2) $A(y, u)=Hu$,

则迭 A 算子退化为迭置.

証明 如果等式(1)永远成立,则有

$$\begin{aligned}&\underset{x\to 0}{A}f(x)=f(0)=a_0,\\&\underset{x\to 1}{A}f(x)=A(a_0, f(1))=a_1,\\&\underset{x\to 2}{A}f(x)=A(a_1, f(2))=Ha_1,\\&\underset{x\to 3}{A}f(x)=A(Ha_1, f(3))=H^2a_1,\end{aligned}$$

一般有

$$\underset{x\to Sy}{A}f(x)=H^ya_1.$$

故得(注意, $H^0a_1=a_1$):

$$\begin{aligned}\underset{x\to y}{A}f(x)&=a_0Ny+H^{Dy}a_1N^2y\\&=f(0)\cdot Ny+H^{Dy}A(f(0), f(1))N^2y.\end{aligned}$$

这里"H^xy"为一固定函数,故本式右端不含任何算子而只有迭置,即 $\underset{x\to y}{A}$ 退化为迭置.

如果等式(2)永成立,则有

$$\begin{aligned}&\underset{x\to 0}{A}f(x)=f(0),\\&\underset{x\to 1}{A}f(x)=A(f(0), f(1))=Hf(1),\\&\underset{x\to 2}{A}f(x)=A(Hf(1), f(2))=Hf(2),\end{aligned}$$

一般說来,有:

$$\underset{x\to Sy}{A}f(x)=Hf(y).$$

故得

$$\underset{x\to y}{A}f(x)=f(0)Ny+Hf(y)\cdot N^2y.$$

本式右端只有迭置,从而定理得証.

因此欲使 $\underset{x\to n}{A}$ 的确是算子而不退化为迭置, 则 $A(x, y)$ 必不能满足上定理中的两等式. 讀者可驗証加法、乘法、max、min 等都不滿足上两等式, 事实上 $\sum$、$\prod$、$\underset{x\to n}{\max}$、$\underset{x\to n}{\min}$ 等也是眞正的算子.

注意：上两等式基本上是説，$A(x, y)$ 实质上是一元函数.

对于一个算子 α 是否退化为迭置，这常常是人們經常注意的事情. 如果 α 退化为迭置，便引入函数 $A_1, \cdots, A_h$ 而把 α 改用迭置表示，并説 α **不是眞正的算子**(因为我們认为：迭置比任何算子均簡单).

下文将可証明(見第三章 §4)：如果 $\underset{x\to y}{\alpha}$ 的模函数为常数(与 y 及 $f(x)$ 均无关)，則 α 退化为迭置. 要对眞正的算子 α 而求 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 的值，必須使用可变多个 f 值，且各 f 值中变元的最大变值不是常数.

其次，下面再討論算子之間的表示关系.

定义 如果由函数 $A_1, \cdots, A_h, f(x)$ 出发，經过有限次迭置及实施算子 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 的結果，可以作出函数 $\underset{(x)\to(y)}{\alpha}\{f_1(x_i), \cdots, f_s(x_i)\}$，則説算子 α 可用 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ **表示**，或更明确些，借助于函数 $A_1, \cdots, A_h$ 及迭置后，算子 α 可用 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 表示.

定义 設有两組算子$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$，$\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$，如果每个 α_i 均可用諸 β_i 表示，而每个 β_i 也可用諸 α_i 表示，則説諸 α_i 与諸 β_i 可**互相表示**.

如果$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$可用 $\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$ 表示，我們便认为諸 β_i 的力量强于諸 α_i，如果$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$与$\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$可互相表示，我們便认为諸 α_i 与諸 β_i 的力量是一样强的(在与所需的函数配合之下).

因此，如果 α 与 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 可以互相表示，那末一个算子 α 便可以起两个算子 β_1、β_2 的作用；如果 α 与 β 可以互相表示，則两者便可互相代替. 当然，如果限定使用某一类函数(例如五則函数)，則討論互相表示时应該只限于借助这类函数而不应該借助于别的函数.

还应注意一点. 如果两算子 α、β 是一个算子的不同表达方式，則 α 与 β 当然可以互相表示；但当两算子 α、β 可互相表示时，它們未必是同一个算子，即未必有 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x) = \underset{x\to y}{\beta} f(x)$. 因此讀者应

該分清楚："两算子相同"及"两算子可互相表示"这两个概念.

我們有下列的等式：

(1) $\min\limits_{x\to y} Nf(x)=N\max\limits_{x\to y} N^2f(x)$;

(2) $\max\limits_{x\to y} Nf(x)=N\min\limits_{x\to y} N^2f(x)$;

(3) $\operatorname*{rtu}\limits_{y} f(x,\ y)=\operatorname*{rti}\limits_{y} f(x,\ y)$ （当 f 滿足唯一性时）;

(4) $\min\limits_{x\to n} N^2f(x)=N^2f(\operatorname*{rti}\limits_{x\to n} f(x))$;

(5) $\operatorname*{rti}\limits_{y} f(x,\ y)=\operatorname*{rtu}\limits_{y}[f(x,\ y)+N^2y\cdot\min\limits_{t\to Dy} Nf(x,\ t)]$;

(6) $\min\limits_{x\to n} Nf(x)=\coprod\limits_{x\to n} Nf(x)$.

由(1)、(2)两式可知，$\min\limits_{x\to y} N$ 及 $\max\limits_{x\to y} N$ 这两算子可以互相表示，但幷非同一个算子（显然 $\min\limits_{x\to y} Nf(x)\neq\max\limits_{x\to y} Nf(x)$）．由(3)、(4)、(5)三式可知，算子 $\operatorname*{rti}\limits_{y}$ 与算子組$\{\operatorname*{rtu}\limits_{y},\ \min\limits_{x\to n} N\}$可以互相表示，从而可見 $\operatorname*{rti}\limits_{y}$ 的确比 $\operatorname*{rtu}\limits_{y}$ 要力量强一些．由(6)式可見，算子 $\min\limits_{x\to y} N$ 及 $\coprod\limits_{x\to y} N$ 不但可以互相表示，而且是同一个算子（不过表达方式不同罢了）.

此外，还可注意到，在上列各算子的互相表示中，所借助的函数仅限于 $x+y$ 及 xNy，这两者都是相当簡单的函数．由此足見，借助于相当簡单的函数，以上各对算子組之間便可互相表示.

极易証明下述事实：

定理 2 加限算子恒可用相应的未加限算子幷借助于函数 min 而表示；未加限算子恒可用模（模函数或模算子）及相应的加限算子而表示.

推論 在特例，$\widehat{\operatorname*{rti}}\limits_{y\to x}$（加限）可用 $\operatorname*{rti}\limits_{y}$（未加限）幷借助于函数 eq 及 N 而表示.

既然弄明白了算子之間的相互表示的关系，現在可进而討論最强算子（及最弱算子）的概念了．可以表示（被表示于）某集中每一算子的算子便称为該集的**最强**（**最弱**）**算子**．最弱算子迄今还未找出，故下面专討論最强算子.

定义 設有一算子集，如果該集中每一算子均可用該集中某一算子 α 表示，則 α 叫做該集的**最强算子**.

可以証明(見第三章 § 4)：初等算子集是有最强算子的.

定义 設有一函数集，如果存在一函数 $g(t, x)$，使得任給該集中一函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，恒有一数 t_0，滿足条件

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(t_0, pg^n 0 x_1 x_2 \cdots x_n),$$

則說 g 为該函数集的**枚举函数**，而該函数集便叫做**可枚举的函数集**.

定理 3 以某一可枚举函数集为作用域的一切算子所組成的算子集，具有一个最强算子.

証明 設該函数集的枚举函数为 $g(t, x)$，即任給該集中一函数 $f(x)$，恒有一数 t_f，使得

$$f(x) = g(t_f, pg(0, x)).$$

t_f 显然是随 f 而更改的，因此有一泛函(它为算子的特例) $\underset{x}{\gamma}$，使得

$$t_f = \underset{x}{\gamma} f(x).$$

今証以該函数集为作用域的任一算子 β 均可用 $\underset{x}{\gamma}$ 表示.

設 β 为 $(1, 1, 1)$ 型的(如为 (s, m, n) 型，須作适当的更改，这沒有原則上的困难)，并設 β 作用于 f 而得 h：

$$h(y) = \underset{x \to y}{\beta} f(x).$$

我們知道，$h(y)$ 与 $f(x)$ 之間旣有算子 β 連系其間，故在 t_f 及 t_h 之間也必有函数連系其間. 設該函数为 φ，即設：只要 $h(y) = \underset{x \to y}{\beta} f(x)$，便有

$$t_h = \varphi(t_f).$$

函数 φ 显然存在(但未必可計算)，故有：

$$\begin{aligned}\underset{x \to y}{\beta} f(x) &= h(y) = g(t_h, pg(0, y)) \\ &= g(\varphi(t_f), pg(0, y)) = g(\varphi(\underset{x}{\gamma} f(x)), pg(0, y)).\end{aligned}$$

因此，$\underset{x \to y}{\beta}$ 便可用 $\underset{x}{\gamma}$ 而表示(借助于函数 g、φ 及 pg).

于是定理得証.

注意：$\underset{x}{\gamma}$是非能行算子（一般說来，即使枚举函数 g 是可計算的，未必能由 f 而求出 t_f），φ 也未必为可計算函数，所以定理 3 与下文的关系不大（已約定：本书不討論非能行算子）．但它毕竟表明了：在一定条件下，非能行算子中是有最强算子的．至于半能行算子中，根据猜测大概也是有最强算子的．但高等能行算子中有沒有最强算子則尙未能得解决．

与相互表示問題有关的是算子的化归問題．

定义 如果算子 β 可用算子 α 表示，而算子 α 显为算子 β 的特例，便說算子 β **可化归于**算子 α．

显然，这时 α 与 β 可互相表示，从而两者力量是一样的．

下面将証明一些特殊算子的化归問題．現在先討論两个較一般性的問題：类型的化归和参数的删除．

上节曾定义过算子的型，今再重新列出如下：

定义 如果算子 α 把 s 个 m 元函数 $f_1, \cdots, f_s$ 改造成一个 n 元函数 g，則 α 称为 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ **型**的，記为

$$g(y_1, \cdots, y_n) = \underset{(x_1, \cdots, x_m)\to(y_1, \cdots, y_n)}{\alpha} \{f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_s(x_1, \cdots, x_m)\}.$$

利用广义幺函数，可以假定各 f_i 的变元个数相同（同为 n）．因此，除却 α 作用于无穷多个函数以外（这种算子这里不討論），每个算子都是某一种 (s, m, n) 型的算子．

如果有若干个算子，我們永可使得它們的型相同（只要利用广义幺算子及多写几个被作用的函数便成）．下面即作这样假定．

定义 如果可找出一組函数 $\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_s$，使 $\underset{(x)\to(y)}{\alpha}(\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_s)$ 有定义，則說算子 α 的**作用域非空**．

現在試图对算子的类型作化归，証明在适当的函数及适当的迭置配合之下，任何 (s, m, n) 型算子均可化归为 $(1, 1, 1)$ 型算子．

定理 4 任給 h 个 (s, m, n) 型的作用域非空的算子 $\alpha_i (1\leqslant i\leqslant h)$，恒可作出一个 $(1, 1, 1)$ 型算子 β 与它可互相表示，这只要有足够

的配对函数而且$(m, 1)$、$(1, 1)$及$(2^*, 1)$、$(1, n^*)$迭置可自由使用.

証明 設α_i为：把$f_{i1}, \cdots, f_{is}$改造为g_i. 今証：$(\alpha_1, \cdots, \alpha_h)$与

$$\beta: \text{把 } pg^{hs}If'_{11}f'_{12}\cdots f'_{h,s-1}f'_{hs} \text{ 改造为 } pg^hIg'_1\cdots g'_h, \text{ 而}$$
$$\text{把别的函数改造为 } 0 \text{（或任意預先指定的函数）}$$

可互相表示. 这里的算子“$'$”的意义見第一章§5.

显然，对于任給的i，$\alpha_i(f_{i1}, \cdots, f_{is})$可如下求得：由于$\alpha_j(j\neq i)$作用域非空，故可取出$\tilde{f}_{j1}, \cdots, \tilde{f}_{js}$. 由适当配对函数及$(m, 1)$迭置可以作出$f'_{i1}, \cdots, f'_{is}, \tilde{f}'_{j1}, \cdots, \tilde{f}'_{js}$，由$pg$及$(2^*, 1)$迭置可作出

$$pg^{hs}I\tilde{f}'_{11}\cdots f'_{i1}\cdots f'_{is}\cdots \tilde{f}'_{hs},$$

实施算子β，即得

$$pg^hI\tilde{g}'_1\cdots g'_i\cdots \tilde{g}'_h,$$

利用LK^i及$(1, 1)$迭置卽得g'_i，再由$pg^nx_0x_1\cdots x_n$及$(1, n^*)$迭置卽得$g_i=\alpha_i(f_{i1},\cdots,f_{is})$. 讀者不难据此利用$\beta$而把$\alpha_i(f_{i1},\cdots,f_{is})$表示出来. 故每一$\alpha_i$均可用$\beta$表示.

反之，β可用$(\alpha_1, \cdots, \alpha_h)$表示如下：

$$\underset{(x)\leftarrow(y)}{\beta} f=0 \quad \text{当 } f \text{ 不呈 } pg^{hs}If'_{11}\cdots f'_{hs} \text{ 形时}$$

（f是否呈此形极易判定，而且其特征函数为五则函数）.

当f呈$pg^{hs}If'_{11}\cdots f'_{hs}$形时，利用函数$LK^j$及$(1, 1)$迭置可得$f'_{i1}, \cdots, f'_{is}(1\leqslant i\leqslant h)$，利用函数$pg^nx_0x_1\cdots x_m$及$(1, m^*)$迭置可得$f_{i1},\cdots, f_{is}$，利用$\alpha_i$可得$g_i$，由$LK^j$及$(n, 1)$迭置得$g'_i(1\leqslant i\leqslant h)$，再利用$(2^*, 1)$迭置得$pg^hIg'_1\cdots g'_h$，它卽$\underset{(x)\rightarrow(y)}{\beta} f$.

这样，β卽可用諸α_i表示.

定理得証.

在証明中，$(m, 1)$、$(n, 1)$、$(1, m^*)$、$(1, n^*)$只使用于由諸f作出諸f'，或由諸g'作出諸g的过程中，因此得

推論 如果用f'作为多元函数（pg除外）f的表达式，則只要

有$(2^*, 1)$及$(1, 1)$迭置，即可把任何h个(s, m, n)型算子化归为一个$(1, 1, 1)$型算子.

定义 如果算子α把$f_1, \cdots, f_s$改造为g，則用α'、α^*表下列算子(分別叫做**有 $'$**、**有 $*$ 算子**)：

$$\alpha'\text{: 把 } f'_1, \cdots, f'_s \text{ 改造为 } g',$$

$$\alpha^*\text{: 把 } f^*_1, \cdots, f^*_s \text{ 改造为 } g^*.$$

利用定理4，則上述的推論可改述为：

推論 只要$(2^*, 1)$及$(1, 1)$迭置可用，任給h个有$'$算子$\alpha'_1, \cdots, \alpha'_h$，恒可化归为一个$(1, 1, 1)$型算子$\beta$.

同理，又可証明下述定理.

定理5 如果G_n、LK^n及$(1, 1)$迭置可用，則任給h个作用域非空的有$*$算子$\alpha^*_1, \cdots, \alpha^*_h$，恒可化归为一个$(1, 1, 1)$型算子$\gamma$.

証明 設α^*_i把$f^*_{i1}, \cdots, f^*_{is}$改造为$g^*_i$，則所求的$\gamma$为：

γ 把 $pg^{hs}I(f'_{11}K)\cdots(f'_{hs}K)$ 改造为 $pg^hI(g'_1K)\cdots(g'_hK)$，

亦即

$$\gamma \text{ 把 } f^*_{hs}G_{hs}f^*_{h, s-1}G_{h, s-1}\cdots f^*_{12}G_2f^*_{11}G_1 \text{ 改造为}$$
$$g^*_hG_hg^*_{h-1}G_{h-1}\cdots g^*_2G_2g^*_1G_1,$$

当被作用函数不呈此形时其值为0.

今証$(\alpha^*_1, \cdots, \alpha^*_h)$与$\gamma$可互相表示.

設求$\underset{x\to y}{\alpha^*_i}(f^*_{i1}, \cdots, f^*_{is})$. 取$\tilde{f}^*_{j1}, \cdots, \tilde{f}^*_{js}$($j\neq i$，由于$\alpha^*_j$作用域非空，这些函数是可以取出的)，由它們与$G_i$($1\leqslant i\leqslant hs$)即可作出$pg^{hs}I(f'_{11}K)\cdots(f'_{hs}K)$，实施$\gamma$即得$pg^hI(\tilde{g}'_1K)\cdots(\tilde{g}'_iK)\cdots(\tilde{g}'_hK)$，它与$pg(LK^h, LK^{h-i})$作$(1, 1)$迭置即得$pg(L, g'_iK)$，即$g^*_i$，即$\alpha^*_i(f^*_{i1}, \cdots, f^*_{is})$，故知$\alpha^*_i$可用$\gamma$表示.

反之，$\underset{x\to y}{\gamma} f$之值如下：

$$\underset{x\to y}{\gamma} f=0, \text{ 当 } f \text{ 不呈 } pg^{hs}I(f'_{11}K)\cdots(f'_{hs}K) \text{ 形时}$$

(这条件的特征函数易表为五則函数). 如果f呈上述形狀，則把它与$pg(LK^{hs}, LK^t)$作$(1, 1)$迭置即易求得$pg(L, f'_{ij}K)$，即

$f_{ij}^*(1\leqslant i\leqslant h,\ 1\leqslant j\leqslant s)$，即求出一切$f_{ij}^*$，于是利用$\alpha_i^*$即可得$g_1^*$，$g_2^*$，…，$g_h^*$．将它們与$G_n$作(1，1)迭置即得$g_h^*G_hg_{h-1}^*G_{h-1}\cdots g_1^*G_1$，即$\underset{x\to y}{\gamma}f$．这样，$\gamma$便可用$(\alpha_1^*,\ \cdots,\ \alpha_h^*)$表示了．

定理得証．

推論 如把多元函数f的表达式改用f^*，只要G_n及LK^n及(1，1)迭置可自由使用，則任何h个算子均可化归为一个(1，1，1)型算子．

証明 因这时任何算子均是有*算子．

注意：如果不用f^*作为多元函数f的表达式，那末还須添加若干函数及多多迭置，以保証由f可作f^*，由f^*可作f．不管如何，只要多多迭置可用，那末任何h个$(s,\ m,\ n)$型算子均可化归为一个(1，1，1)型算子．这样，在类型的化归方面便可以化归到最簡了．

在討論算子时总是容許使用一切迭置的，因此在作理論的探討时，永可假定一切算子均已化归为(1，1，1)型算子了．这样，将可使一切討論化簡．上面的討論中已多次使用(1，1，1)型算子作为一切算子的代表，根据这里的結果可以看出，使用(1，1，1)型算子作代表一般說来并沒有丧失結果的普遍性．

算子可以分为两种，容許参数的和不容許参数的．如一算子的作用域只能依賴于作用变元而不能依賴于参数的（如果作用域含有参数，整个式子便算无意义），則該算子叫做**不容許参数的算子**；反之，如一算子允許作用于不管含参数或否的作用域，則該算子便叫做**容許参数的算子**．对于同一个算子說来，容許参数或否，其結果可以是大不相同的．就(1，1，0)型算子$\underset{x}{\mathrm{rti}}$而言．如果它不容許参数，則只能作用于一元函数$f(x)$，从而只能作出常值函数$\underset{x}{\mathrm{rti}}\,f(x)$，决不能作出非常值的函数来，其力量是非常微弱的；但如果它容許参数，因而可以作用于函数$f(u_1,\ \cdots,\ u_r,\ x)$得出$\underset{x}{\mathrm{rti}}\,f(u_1,\cdots,u_r,x)$，这时它的力量便非常强，由加法、乘法、$\mathrm{eq}(x,y)$

出发，利用迭置及該算子便可作出一切可計算的函数来(如果承认在第五章 §10 所引进的邱吉論題的話)．两者力量当然是大大不同的．

对同一算子說来，容許参数与否当然大大不同．試問：任給一个容許参数的算子 α，能否找出另外一个不容許参数的算子 β 与它可相互表示？

当然，如果 α 作用于具 r 个参数的函数 f，这时可把它看作一个新算子 β_r：

$$\underset{(u_1,\cdots,u_r,x)\to(u_1,\cdots,u_r,y)}{\beta_r} f(u_1, \cdots, u_r, x) \text{ 表 } \underset{x\to y}{\alpha} f(u_1, \cdots, u_r, x),$$

而可限定 β 不容許参数，但对 α 說来，r 是可变的，卽 α 容許任意多个参数的，每当 r 变更时，β_r 也会变更，因此若用这种方法时，只能认为：容許参数的算子 α 可用无穷多个不容許参数的算子表示，而不是用一个不容許参数的算子表示．参数个数 r 能否固定呢？对此，有下面的很重要的結果．

定理 6 凡容許参数的算子 α 可以限于只容許一个参数．

証明 設把 α 作用于含 r 个参数的函数 $f(u_1,\cdots, u_r, x)$．今先定义

$$g(u, x)=f(LK^{r-1}u, LK^{r-2}u, \cdots, LKu, Lu, x).$$

令 $\omega=pg^r0u_1\cdots u_r$，显然有：

$$\begin{aligned}\underset{x\to y}{\alpha} f(u_1, \cdots, u_r, x) &= \underset{x\to y}{\alpha} f(LK^{r-1}\omega, LK^{r-2}\omega, \cdots, L\omega, x)\\ &= \underset{x\to y}{\alpha} g(\omega, x),\end{aligned}$$

但 g 只有一个参数，故知 α 永可只作用于具一个参数的 $g(u, x)$ 而得 $\underset{x\to y}{\alpha} g(u,x)(=h(u,y))$，然后再作迭置卽得：$h(\omega,y)=\underset{x\to y}{\alpha} g(\omega,x) = \underset{x\to y}{\alpha} f(u_1, \cdots, u_r, x)$．定理得証．

本結果非常重要．以后每当作出配对函数后，永可假定：凡容許参数的算子均只容許一个参数．

定理 7 任給一个容許参数的算子 α，均可作出另一个不容許参数的算子 β，使与 α 可互相表示，还可要求 β 是 $(1, 1, 1)$ 型的．

証明　所求的 β 为：

$$\underset{(t,x)\to(u,y)}{\beta} f(t, x) = \underset{x\to y}{\alpha} f(u, x).$$

因当 α 作用于不含参数的 f 时有 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x) = \underset{(t,x)\to(u,y)}{\beta} f(x)$．当 α 作用于含参数的 f 时，可限定 f 只有一个参数 u，这时 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x) = \underset{(t,x)\to(u,y)}{\beta} f(t, x)$，故 α 可用 β 表示．当然，这里的 β 是(1, 2, 2)型的．利用上面所述的化归方法，还可把 β 化归为(1, 1, 1)型(讀者試自行化归)，故 β 的确满足要求．

反之，β 显然可用 α 表示(即由上式可見)，故定理得証．

根据本定理，有了配对函数以后可只使用不容許参数的(1, 1, 1)型的算子．

以后将証明，容許参数的算子 rec、itr、inv、reg、stp、$\sum$、$\prod$、$\underset{x\to n}{\text{rta}}$ 等，均可用不容許参数的同名算子来表示．看来，除了$(s, m, 0)$型算子(如 $\underset{y}{\text{rti}}$)以外，所有其他类型的容許参数的算子均可用不容許参数的同名算子来表示，但是这种猜測訖今尙未能証明．

习　　題

1．試証：任給 h 个 (s, m, n) 型算子，均可化归为一个 $(1, m, n)$ 型算子．同时列出所需之条件(本題要求所需条件較簡或証明較簡)．

2．把下列二条件的特征函数写出：

(1) $f(x)$ 呈 $pg^h I f'_1 f'_2 \cdots f'_h$ 之形；

(2) $f(x)$ 呈 $pg^h I(f'_1 K)\cdots(f'_h K)$ 之形．

3．如果已作出两个算子 σ、τ，使得

$$\underset{x\to u}{\sigma}\ \underset{t\to x}{\tau} f(t) = f(u),$$

則与 σ、τ 配合后，下列二算子 α 与 β 必可互相表示：

当 α 把 $f(x)$ 改造为 $g(y)$ 时，β 把 $\underset{t\to x}{\tau} f(t)$ 改造为 $\underset{t\to y}{\tau} g(t)$．

4．設 α 为容許参数的(1, 1, 1)型算子，而 β 定义为：

$$\underset{x\to y}{\beta} f(x) \text{ 表 } \underset{x\to Ly}{\alpha} f(pg(Ky, x)),$$

且 β 不容許参数．求証：容許参数的 α 与不容許参数的 β 可互相表示．

5．試把下列的算子化归为(1, 1, 1)型算子(如可能，作出較通法更簡的結果)：

(1) $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\text{rec}} f(x, y)$;

(2) $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\text{reg}} (g(x), f(x, y))$;

(3) $\underset{x}{\text{rti}} f(\dot{x})$ （注意，它非(1, 1, 1)型）.

6．設算子 α 为$(s, 1, 1)$型，而 $'\alpha$、$^*\alpha$ 定义如下：

$$\underset{x\to y}{^*\alpha} f(x) = (\underset{x\to y}{\alpha} f(x))^*; \quad \underset{x\to y}{'\alpha} f(x) = (\underset{x\to y}{\alpha} f(x))'$$

（被作用函数只写一个）．求証：借助于一元函数及(1, 1)迭置，α 及 α' 可用 $'\alpha$ 表示，而 α 及 α^* 可用 $^*\alpha$ 表示.

§5 递归生成的函数集

本节将对由函数所組成的集合进行討論.

定义 設有一函数集 Δ，由 Δ 中一切 n 元以下的函数所組成的集合記为 Δ_n.

設有一函数集 Δ，如果只要 $f_1, \cdots, f_s$ 属于 Δ，則 $\alpha(f_1, \cdots, f_s)$ 亦属于 Δ，便說 Δ **对 α 是封閉的**.

如果相应于一謂詞 A 的特征函数 ct A 在集合 Δ 中，便說 A 是**集合 Δ 的謂詞**.

在函数集中，下列一类函数集非常重要.

定义 如果在函数集 Δ 中可以找出一子集 U 及一系列算子 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，使得 Δ 中任何一函数，均可由 U 中函数出发，經过有限次迭置及算子 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 而作出，則 Δ 叫做**递归生成的**，而 U 叫做 Δ 的**开始函数集**，諸 α 叫做 Δ 的**生成算子**，Δ 中任一函数又叫做 **$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 于 U 的函数**（如果沒有生成算子，則叫做**迭置于 U 的函数**）.

递归生成的函数集又可如下定义：

定义 如果一函数集 Δ 为满足下列条件的最小函数集：

(1) U 为 Δ 的子集合，

(2) Δ 对迭置封閉，

(3) Δ 对 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ 封閉，

則 Δ 叫做**递归生成的**（其余定义同上）.

讀者可以驗証，这两定义是等价的.

这里，可以容許有无穷多个开始函数，也容許有无穷多个生成算子. 但在实际上所遇到的递归生成的函数集均只有有限多个开始函数及有限多个生成算子.

以 U 为开始函数集，且以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 为生成算子的函数集，将記为(其中"多多"表示使用一切迭置)：

$$\{开始: U;\ 多多;\ 生成: \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}.$$

当由开始函数而逐步作出 $\varDelta$ 中各函数时，往往先作多元函数，然后再作少元函数. 例如，通常总是先作 $x \cdot y$，然后再作 x^2. 这种先多后少的过程总未免有点"兜圈子"的毛病. 能不能够永远由少变元而多变元地作出函数集 $\varDelta$ 来呢？换句話說，在作 n 元函数时，能不能永远只使用 n 元以下的函数呢？亦即，由 $\varDelta$ 为递归生成的这一事实能否推出 $\varDelta_n$ 为递归生成的呢？

定理 1 对任何递归生成的函数集 $\varDelta$ 及任何正整数 n 說来，只要 $\varDelta$ 含有配对函数，那末 $\varDelta_n$ 是递归生成的.

証明 設函数集 $\varDelta$ 为：

$$\varDelta = \{开始: A_1, A_2, \cdots;\ 多多;\ 生成: \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}.$$

由于 $\varDelta$ 中含有配对函数，且对多多迭置封閉，故在 $\varDelta$ 中显然可由 f 而作出 f^*，由 f^* 而作出 f. 而且 F、G、H、L 显然均在 $\varDelta$ 中.

当 $n=1$ 时，今証 $\varDelta_1$ 与下列递归生成集 Q 全同：

$$Q = \{F, G, H, L, A_1^*, A_2^*, \cdots; (1, 1); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots\}.$$

既然 $\varDelta$ 对"*"封閉，故 $A_1^*, \cdots, A_n^*$ 均在 $\varDelta$ 中. 从而 $F, G, H, L, A_1^*, A_2^*, \cdots$(它們均为一元函数)均在 $\varDelta_1$ 中. 在 $\varDelta$ 中既然 f 与 f^* 可互相定义，$\varDelta$ 又对 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 封閉，故 $\varDelta$ 必对 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots$ 封閉，从而 $\varDelta_1$ 对 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots$ 封閉. 这样便可証明 Q 包含于 $\varDelta_1$ 中.

反之，对于任何 $\varDelta$ 中的 n 元函数 f，可以証明 f^* 必在 Q 中.

奠基： 如果 f 为开始函数之一，則 f^* 为某个 A_i^*，故在 Q 中.

归納： 如果 f 由 (m, n) 迭置得出，設 $f = A(B_1, \cdots, B_m)$，依

归納假設，A^*, B_1^*, $\cdots$, B_m^* 在 Q 中，由上可知(借助于 F、G、H、L 后) f^* 可由 A^*, B_1^*, $\cdots$, B_m^* 作(1, 1)迭置作出，故 f^* 在 Q 中.

如果 f 由生成算子 α_i 作出，設 $f=\alpha_i(B_1, \cdots, B_s)$，依归納假設，$B_1^*$, $\cdots$, B_s^* 在 Q 中，Q 既对 α_i^* 封閉，故 $f^*=\alpha_i^*(B_1^*, \cdots, B_s^*)$ 亦在 Q 中.

依数学归納法，本断言得証.

今在 Δ_1 中任取一函数 $f(x)$，由本断言知 f^*(即 $pg(L, f'K)$，即 $pg(L, fLK)$)在 Q 中. 但

$$Lf^*FF=Lpg(L, fLK)pg(I, I)pg(I, I)=f,$$

故知 f 亦在 Q 中，这样便知 Δ_1 在 Q 中.

于是便得 $Q=\Delta_1$，即 Δ_1 是递归生成的.

当 $n\geqslant 2$ 时，由上可知，对 Δ_n 中任一函数說来，f^* 均在 Q 中. 但因 $Lf^*F=f'$，而

$$f'pg^n 0x_1x_2\cdots x_n=f(x_1, \cdots, x_n),$$

故知在 Q 中增加一开始函数 $pg^n 0x_1\cdots x_n$ 及增加一种 $(1, n^*)$ 迭置后即可包含 Δ_n. 反之，显見 $pg^n 0x_1\cdots x_n$ 在 Δ_n 中而 Δ_n 对 $(1, n^*)$ 封閉，故得：

$$\Delta_n=\{Q \text{ 的开始函数}, \ pg^n 0x_1\cdots x_n; \ (1, 1) \text{及} (1, n^*); \ \alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots\}.$$

即 Δ_n 是递归生成的. 定理得証.

以上的討論是允許开始函数及生成算子有无穷多个的情形，如果开始函数或生成算子只有有限多个，結果还可如下簡化.

定理 2 如果递归生成集 Δ 只有有限多个生成算子，且在 Δ 中 f 与 f^* 可互相定义，則 Δ 可以只使用一个(1,1,1)型的生成算子.

讀者試自証之.

定理 3 如果递归生成集 Δ 只有有限多个开始函数 A_1, $\cdots$, A_h，此外，在 Δ 中 f 与 f^* 可互相定义，且 Δ 中含有函数 F、G、H、L，則无論 Δ_1 或 Δ_n 均可只使用三个开始函数. 如果 Δ 中更含有

$pg(I, K^i)$（一切 i），則无論 Δ_1 或 Δ_n 均可只使用两个开始函数.

証明　在第一情形下，Δ_1 可使用下列开始函数：

$$L,\ F,\ pg^{h+2}I(A_1^{*\prime}K)\cdots(A_h^{*\prime}K)(G'K)(H'K) \quad (\text{暂記为 } V_1).$$

因为，L、F 既在 Δ 中，当然更在 Δ_1 中；$A_1,\cdots,A_h,G,H$ 既在 Δ 中，而 Δ 对算子* 封閉，故 $A_1^{**},\cdots,A_h^{**},G^*,H^*$ 均在 Δ 中. Δ 中又有 G、H，故由前面結果可知：

$$pg^{h+2}I(A_1^{*\prime}K)\cdots(A_h^{*\prime}K)(G'K)(H'K)$$

在 Δ 中，由于它为一元，故亦在 Δ_1 中. 换言之，这三函数均在 Δ_1 中.

还須証明，由这三函数可作出 $A_1^*,\cdots,A_h^*$ 及 F、G、H、L. 由它們当然可得 L、F. 至于其余各函数，可如下逐步作出：

$$LV_1=H'L=HLK,$$
$$(HLK)FF=H \quad (=pg(L, LK)),$$
$$LH=LK,$$
$$(LK)V_1=G'L=GLK,$$
$$(GLK)FF=G \quad (=pg(K^2, L)),$$
$$LHG^i=LK^{i+1} \quad (i=1, 2, \cdots),$$
$$LK^{h+2-i}V_1=A_i^{*\prime}K=A_i^*LK,$$
$$(A_i^*LK)FF=A_i^*.$$

于是在第一情形下关于 Δ_1 部分得証.

在第一情形下，Δ_n 可只使用下列开始函数：

$$L,\ F,\ pg^{n+h+2}0x_1\cdots x_n(A_1^{*\prime}K)\cdots(A_h^{*\prime}K)(G'K)(H'K).$$

讀者可自証之.

在第二情形下，Δ_1 可只使用下列开始函数：

$$L,\ pg^{h+2}IA_1^*\cdots A_h^*FGH \quad (\text{暂記为 } \widetilde{V}_1),$$

这时 Δ 既对“*”封閉，故由 f 先造 f^* 再造

$$Gf^*Fpg(I, K^i)=pg(K^2, L)pg(L, f'K)pg(I, I)pg(I, K^i)$$
$$=pg(I, fK^i),$$

然后仿上作出

$$pg^{h+3}IA_1^*\cdots A_h^*FGH.$$

即 L 及 $\widetilde{V}_1$ 均在 Δ_1 中.

由 L 及 $\widetilde{V}_1$ 可以逐步作出各开始函数如下:

$$L\widetilde{V}_1=H(=pg(L,\ LK)),$$
$$LH=LK,$$
$$(LK)\widetilde{V}_1=G,$$
$$LHG^i=LK^{i+1}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots),$$
$$(LK^2)\widetilde{V}_1=F,$$
$$LK^{h+2-i}\widetilde{V}_1=A_i^*.$$

故在第二情形下关于 Δ_1 部分得証.

在第二情形下, Δ_n 可只使用下列开始函数:

$$L,\ pg^{h+n+3}0x_1\cdots x_nA_1^*\cdots A_h^*FGH.$$

讀者可自証之.

于是定理得証.

由于递归生成集 Δ 为一切 Δ_n 的幷集,故得:

定理 4 只要含有适当的配对函数(見上),則任何一个递归生成集 Δ 均可如下生成:

$$\Delta=\{L,\ F,\ G,\ H,\ A_1^*,\ A_2^*,\ \cdots,\ pg^n0x_1\cdots x_n\ (\text{一切}\ n);\ (1,\ 1)\ \text{及}\ (1,\ n^*)\ (\text{一切}\ n);\ \alpha_1^*,\ \alpha_2^*,\ \cdots\}.$$

当 Δ 具有有限个生成算子时,則还可只用一个生成算子.

讀者可自証之.

当开始函数有无穷多个时, 这个生成方式可算是最简的了. 但是当开始函数只有有限多个时, 若用这个方式則变成无穷多个开始函数(因 $pg^n0x_1\cdots x_n$ 的个数无限). 如想保持有限多个开始函数的特征,可改用下列方式:

定理 5 只要含有适当的配对函数(見上),則任何一个具有限多个开始函数 $A_1,\ \cdots,\ A_h$ 的递归生成集 Δ 均可如下生成:

开始函数: L, F, $pg^{h+3}x_1x_2(A_1^{*\prime}K)\cdots(A_h^{*\prime}K)(G'K)(H'K)$,

或　L, $pg^{h+4}x_1x_2A_1^*\cdots A_h^*FGH$.

迭置: $(1, 1)$、$(1, n^*)$、$(2, n^*)$(一切 n).

(这里的$(2, n^*)$是指, 由 pg 及广义么函数作出 $pg^n0x_1\cdots x_n$ 时所使用的迭置).

生成算子: α_1^*, α_2^*, $\cdots$.

当原来生成算子只有有限多个时, 則可只使用一个 $(1, 1, 1)$ 型的生成算子.

讀者可自証之.

最后,还可指出,如果使用 f^* 作为多元函数 f 的表达式,那末在迭置方面可以大大簡化.

定理 6　如果用 f^* 作为多元函数 f 的表达式, 那末对任何递归生成集 Δ, 只要它含有适当的配对函数(見上),則它永可如下生成:

$$\Delta=\{A_1, A_2, \cdots; (1, 1); \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}.$$

当生成算子只有有限多个时永可归并为一个; 当开始函数只有有限多个时,永可并为三个或两个,即:

$$L, F, pg^{h+2}(A_1'K)\cdots(A_h'K)(G'K)(H'K)$$

或

$$L, pg^{h+3}A_1A_2\cdots A_hFGH.$$

讀者可自行証之. 只須注意,这里的 A_i (如为多元的話)实际上是"A_1^*",又可注意,这时 pgx_1x_2 或 $pg^n0x_1x_2\cdots x_n$ 是无用的.

以上所討論的生成方式, 可叫做**标准生成方式**. 从这标准生成方式可以得出:

定理 7　如果两递归生成集均含有 L、F、G、H, 且均由有限个开始函数利用有限个生成算子生成, 則其差异可归結为一个开始函数及一个生成算子的差异.

配对函数有許多种,如果利用下列一种:

$$\widetilde{pg}_a(x, y)=T_a(T_a(x+y)+y)+x,\ \widetilde{K}_a x=E_a x,\ \widetilde{L}_a x=E_a R_a x,$$

那末显見,除一元函数外只用到一个二元函数:加法，故有:

定理 8 如果一递归生成函数集 Δ 含有加法、$T_a x$、$E_a x$、$R_a x$，那末只須在 Δ_1 以外再加入加法、I_{ni} 及$(1, n^*)$、$(2, n^*)$ 迭置,即可作出 Δ_n.

由这定理可見加法的重要(不过,只用乘法及一元函数亦可作出配对函数組,对别的二元函数恐怕也有这种特性. 如果这样的話,那末加法及乘法便失去其特殊地位了).

最后，我們指出，如果只使用一元函数及$(1, 1)$迭置，則算子 α 与 α^* 是不能互相表示的(因互相表示时两者都需借助于"*"运算),因此上面定理中的"α^*"不能改为"α"，即对递归生成集 Δ 說来,其 Δ_1 未必可用 α(即使 α 是$(s, 1, 1)$型)作生成算子,因此下列定理便很重要了.

定理 9 設递归生成函数集 Δ 的唯一生成算子为 α^*，而 α 为$(s, 1, 1)$型，又設借助于若干一元函数及$(1, 1)$迭置后算子 α^* 可由 α 表示,則从适当的一元函数出发，利用$(1, 1)$迭置及 α 即可作出函数集 Δ_1.

讀者可自証之.

习　　题

1. 将本节未詳証的定理加以詳細証明.

2. 試証：如果一算子 β 可由某递归生成集的生成算子借助于該集的函数而表示,則該递归生成集必对 β 封閉.

3. 如果一递归生成集对算子 β 封閉，問是否 β 必可由該递归生成集的生成算子表示?(借助于該集的函数,或借助于一般的函数.)

4. 設 Δ 的諸生成算子 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 为$(s, 1, 1)$型. 一般說来，Δ_1 未必可由 α_i 生成,但永可由 α_i^* 或由 $^*\alpha_i(^*\alpha_i f(x)=(\alpha_i f(x))^*)$ 生成,試証明之.

注意:因此,在一定意义之下可以說,对生成递归生成集的过程而論,α^* 强于 α ($^*\alpha$ 当然强于 α，見上节习題第 6 題).

5. 如果采取下述方式定义"集 Δ 的謂詞"：凡能表成 $f=g$ 形的謂詞(其中 f 与 g 为集 Δ 的函数)均叫做**集 Δ 的謂詞**.

問：这里所定义的,与本节正文中所定义的集 Δ 的謂詞是不是等价的定义？哪个包含多些？

并証：如果集 Δ 含有函数 $\mathrm{eq}(x, y)$，且对迭置封閉，則这两定义所引入的概念是一致的.

§6 三大函数集

上面已經說过(§3)，算子分成四种：非能行的、半能行的、高等能行的及初等能行的. 本书不討論非能行算子，因此只研究后面三种.

每种算子都有許多,我們須挑选一些有代表性的、有特殊性质的、应用广泛的算子来加以研究. 照这要求說来,将以原始递归式及其推广的这系算子为最合适了.

原始递归式算子本身是高等能行算子,它的加限算子(加限原始递归式)是初等能行算子，它的推广（半递归式）是半能行算子，这恰好可作为上述三大类算子的代表.

求逆式也很重要,但求逆式本身是半能行算子,它的加限算子是初等能行算子，我們无法从求逆式这系算子中找出一个合用的高等能行算子来. 此外，虽則受限求逆式作用于本原函数时所得的結果基本上与加限原始递归式一致（但已弱得多)，而不受限的求逆式作用于本原函数时所得的結果与半递归式大不相同，反映不出求逆式的全部力量. 因此，研究中宜以原始递归式这一系为主,而以求逆式这一系为輔.

定义 由本原函数出发，經过有限次迭置及加限原始递归式（或原始递归式，或半递归式）而作成的函数所組成的集合叫做**初等函数集**(**原始递归函数集**、**半递归函数集**). 如果除本原函数外，还用到 A_1, …, A_h 为开始函数，則称其为**初等于**(**原始递归于**、**半递归于**) A_1, A_2, …, A_h **的函数集.**

注意：这里所定义的初等函数集与一般的递归函数論的书上所定义的(亦即 Kalmar 所定义的)不同，那里的初等函数集(照这里定义)应是初等于 $x+y$、$x\cdot y$、2^x 的函数集(参見第三章§2).

凡屬于初等函数集的謂詞，即其特征函数为初等函数的謂詞，叫做**初等謂詞**. **原始递归謂詞**及**半递归謂**詞等仿此定义.

半递归函数中处处有定义的函数叫做一般递归函数. 以后可以証明，一般递归函数可以由本原函数出发經过有限次迭置及一般递归式(即其中所用的 $g(x)$ 是归宿函数的)而作出. 換言之，在作出一般递归函数时，可以永远不使用那些未必处处有定义的函数. 再換一句話說，一般递归函数集也是递归生成的.

以后将詳細討論这三大函数集：初等函数集，原始递归函数集及半递归函数集(但在討論半递归函数集时，則以一般递归函数集为主).

当使用額外的开始函数(如上文中的諸 A_i)时，通常均由下二元函数列$\{\varphi_n(u, x)\}$选取：

$$\begin{cases} \varphi_0(u, x) = Sx \\ \varphi_{n+1}(u, x) = \underset{t\to(u,x)}{\text{itr}}\ \varphi_n(u, t). \end{cases}$$

容易驗証，φ_1 即加法，φ_2 基本上是乘法，φ_3 基本上是乘方.

习　　題

1. 由本原函数出发，經过有限次的迭置及摹状式后，能够造出什么函数？能否全部列举出来？

2. 由本原函数出发，經过有限次的迭置及受限摹状式后，能够造出什么函数？能否全部列举出来？

3. 同第1、2題，但算子則改用求逆算子(受限或否).

4. 同上，但算子則改用 $\underset{x\to n}{\min}$，或 $\underset{x\to n}{\max}$，或 $\sum_{x\to n}$，或 $\sum_{x\to n} N$，或 $\prod_{x\to n}$.

5. 試証：$\varphi_1(u, x) = u+x$，$\varphi_2(u, x) = u\cdot Sx$，$\varphi_3(u, x) = \left[\dfrac{(u^{Sx} \dot{-} 1)\cdot u}{u \dot{-} 1}\right]$.

第三章　初等函数集

§1　四个初等函数集(上)

首先,我們給出下列定理.

定理　如果(参数 u 可以有多个,这里只写一个)

$$h(u, m, 0)=m,$$

$$h(u, m, Sn)=f(u, n, h(u, m, n)) \quad (\text{一切 } n),$$

$$h(u, m, n)\leqslant g(u, m, n) \quad (\text{一切 } n),$$

并用 A 表示 $\max(n, g(u, m, n))$,則有:

$$h(u, m, n)=\underset{(x,y)\to(A,m,n)}{\widehat{\text{rec}}} f(u, x, y). \tag{*}$$

如果 f 与第二变元 x 无关,則 A 还可代以 $g(u, m, n)$.

証明　設命式(*)右端所定义的函数为 $h_1(u, m, n)$,則

$$\begin{cases} h_1(u, m, 0)=m; \\ h_1(u, m, Sn)=f(u, \min(A, n), \min(A, h_1(u, m, n))). \end{cases}$$

今用数学归納法証明(*)式.

奠基:　$h_1(u, m, 0)=m=h(u, m, 0)$,故(*)成立.

归納:

$$\begin{aligned} h_1(u, m, Sn) &= f(u, \min(A, n), \min(A, h_1(u, m, n))) \\ &= f(u, n, \min(A, h(u, m, n))) \quad (\text{归納假設}) \\ &= f(u, n, h(u, m, n)) \\ &= h(u, m, Sn), \end{aligned}$$

故依数学归納法,(*)式得証.

由証明过程可見,如 f 与 x 无关,則 A 可换为 $g(u, m, n)$.故定理得証.

推論 如果 $\underset{(x,y)\to(m,n)}{\text{rec}} f(u, x, y) \leqslant g(u, m, n)$ 对一切 n 成立，则有(A 仍表示 $\max(n, g(u, m, n))$)：

$$\underset{(x,y)\to(m,n)}{\text{rec}} f(u, x, y) = \underset{(x,y)\to(A,m,n)}{\widehat{\text{rec}}} f(u, x, y).$$

利用函数列 $\varphi_n(u, x)$ (見第109頁)可依次作出下列各函数集.

(一) **零級初等函数**(即上文的初等函数)

(0-1) $Dn = \underset{(x,y)\to(n,0,n)}{\widehat{\text{rec}}} x$. 因为:

$$D0 = 0,$$
$$DSn = n,$$
$$Dn \leqslant n.$$

(0-2) $m \dot{-} n = \underset{(x,y)\to(m,m,n)}{\widehat{\text{rec}}} Dy$. 因为:

$$m \dot{-} 0 = m,$$
$$m \dot{-} Sn = D(m \dot{-} n),$$
$$m \dot{-} n \leqslant m.$$

(0-3) $Nx = 1 \dot{-} x$.

(0-4) $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$.

(0-5) $N^2 \max(x, y) = N\min(Nx, Ny)$.

(0-6) $mNn = \underset{(x,y)\to(m,m,n)}{\widehat{\text{rec}}} 0$. 因为:

$$mN0 = m,$$
$$mNSn = 0,$$
$$mNn \leqslant m.$$

(0-7) $m + Nn = \underset{(x,y)\to(Sm,Sm,n)}{\widehat{\text{rec}}} m$. 因为:

$$m + N0 = Sm,$$
$$m + NSn = m,$$
$$m + Nn \leqslant Sm.$$

(0-8) $\text{eq}(m, n) = N(N(m \dot{-} n)N(n \dot{-} m))$.

(0-9) $\mathrm{rs}(n, m) = \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(n,0,n)} SyN(mN(m \dot{-} Sy))$. 因为:

$$\mathrm{rs}(0, m) = 0,$$

$$\mathrm{rs}(Sn, m) = S\,\mathrm{rs}(n, m)N(mN(m \dot{-} S\,\mathrm{rs}(n, m))),$$

$$\mathrm{rs}(n, m) \leqslant n.$$

(0-10) $\left[\frac{n}{m}\right] = \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(n,0,n)} y + N\mathrm{rs}(Sx, m)$. 因为:

$$\left[\frac{0}{m}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{Sn}{m}\right] = \left[\frac{n}{m}\right] + N\,\mathrm{rs}(Sn, m),$$

$$\left[\frac{n}{m}\right] \leqslant n.$$

(0-11) $\mathrm{rs}(n, S(l\cdot Sm)) = \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(n,0,n)} Sy\cdot N^2 l\cdot N^2\left(Sm \dot{-} \left[\frac{y}{l}\right]\right)$.

因为:

$$\mathrm{rs}(0, S(l\cdot Sm)) = 0,$$

$$\mathrm{rs}(Sn, S(l\cdot Sm)) = S\,\mathrm{rs}(n, S(lSm))N^2 l \cdot N^2\left(Sm \dot{-} \left[\frac{\mathrm{rs}(n, S(lSm))}{l}\right]\right),$$

$$\mathrm{rs}(n, S(l\cdot Sm)) \leqslant n.$$

(0-12) $[\sqrt{n}] = \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(n,0,n)} y + N\left(Sy \dot{-} \left[\frac{Sx}{Sy}\right]\right)$. 因为:

$$[\sqrt{0}] = 0,$$

$$[\sqrt{Sn}] = [\sqrt{n}] + N\left(S[\sqrt{n}] \dot{-} \left[\frac{Sn}{S[\sqrt{n}]}\right]\right),$$

$$[\sqrt{n}] \leqslant n.$$

注意: Sn 为平方数当且仅当 $S[\sqrt{n}] \dot{-} \left[\frac{Sn}{S[\sqrt{n}]}\right] = 0$.

(0-13) $E_1 n = \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(n,0,n)} SyN^2\left(S[\sqrt{x}] \dot{-} \left[\frac{Sx}{S[\sqrt{x}]}\right]\right)$. 因为:

$$E_1 0 = 0,$$

$$E_1Sn=SE_1n\cdot N^2\left(S[\sqrt{n}]\dot{-}\left[\frac{Sn}{S[\sqrt{n}]}\right]\right),$$

$$E_1n\leqslant n.$$

(0-14) $L_1n=[\sqrt{n}]\dot{-}E_1n.$

(0-15) $\bar{L}_1n=[\sqrt{n}]\dot{-}\left[\dfrac{SE_1n}{2}\right].$

(0-16) $E^n m=\widehat{\underset{y\to(m,m,n)}{\text{itr}}}\,Ey.$

($L_1^n m$ 及 $\bar{L}_1^n m$ 等仿此.)

値得注意的是:利用零級初等函数,可以从加限原始递归式表示好些重要的算子.

(0.1) $\underset{x\to n}{\text{rti}}\,f(x)=\widehat{\underset{(x,y)\to(n,0,n)}{\text{rec}}}\,(y+N^2f(y)).$

(0.2) $\underset{x\to n}{\text{rta}}\,f(x)=n\dot{-}\underset{x\to n}{\text{rti}}\,f(n\dot{-}x)Nf(\underset{x\to n}{\text{rti}}\,f(x)).$

(0.3) $\sum\limits_{x\to n}Nf(x)=\widehat{\underset{(x,y)\to(Sn,Nf(0),n)}{\text{rec}}}\,\{y+Nf(Sx)\}.$

(0.4) $\prod\limits_{x\to n}Nf(x)=Nf(\underset{x\to n}{\text{rti}}\,Nf(x)).$

(0.5) $\max\limits_{x\to n}f(x)=f(\underset{x\to n}{\text{rti}}\,N\prod\limits_{t\to n}N^2(Sf(x)\dot{-}f(t))).$

(0.6) $\min\limits_{x\to n}f(x)=f(\underset{x\to n}{\text{rti}}\,N\prod\limits_{t\to n}N^2(Sf(t)\dot{-}f(x))).$

但是,在零級初等函数集中却是表示不出 $\sum\limits_{x\to n}f(x)$ 及 $\prod\limits_{x\to n}f(x)$ 的.

由上面所列看来,似乎零級初等函数包括很广,已很足用;但是,讀者应明确,零級初等函数包括极狭,它甚至不包括 $x+y$ 或 $2x$(第三章§3将給出証明).因此,下面再引入一級初等函数.

(二) **一級初等函数**——初等于 $x+y$ 的函数

添入 $x+y$ 后,即得

(1-1) $x+y.$

(1-2) $2x(=x+x)$,一般地,$ax=\underbrace{x+\cdots+x}_{a\text{个}x}.$

(1-3) $x\dot{\dot{-}}y=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x).$

(1-4) $\max(x, y)=x+(y\dot{-}x)$.

一級初等函数集虽然多了好些函数,但下面可以証明,$x\cdot y$ 或 x^2 尚不在其中. 因此,再引入二級初等函数.

(三) **二級初等函数**——初等于 $x+y$、x^2 的函数

添入新开始函数 x^2 后,即得

(2-1) $m\cdot n=\underset{(x,y)\to(A,0,n)}{\widehat{\text{rec}}}(y+m)$, A 表示 $(\max(m, n))^2$.

(2-2) $T_a n=n+\left[\dfrac{Sa\cdot n(n\dot{-}1)}{2}\right]$.

(2-3) $pg_a(m, n)=T_a(m+n)+m$.

(2-4) $\widetilde{pg}_a(m, n)=T_a(T_a(m+n)+n)+m$.

(2-5) $\overline{pg}_a(m, n)=T_a\left(\left[\dfrac{m+(a\dot{-}1)}{a}\right]+n\right)+m$.

注意: 尽管与 pg_a、$\widetilde{pg}_a$、$\overline{pg}_a$ 相应的配对左右函数都是零級初等函数,但这三个合函数却是二級初等函数. 有了配对函数后,可限定各算子只容許一个参数.

(*) $\sum\limits_{x\to n}f(x)=\underset{(x,y)\to(A,f(0),n)}{\widehat{\text{rec}}}\{y+f(Sn)\}$,

这里 A 表示 $(\max\limits_{x\to n}f(x))\cdot Sn$.

可以証明, 2^x 不在二級初等函数集中. 故再引入:

(四) **三級初等函数**——初等于 $x+y$、x^2、2^x 的函数

添入新开始函数 2^x 后,即得

(3-1) $m^n=\underset{(x,y)\to(A,1,n)}{\widehat{\text{rec}}}m\cdot y$,

这里 A 表示 $2^{m\cdot n}$ $(\geqslant m^n)$.

(3-2) $n!=\underset{(x,y)\to(A,1,n)}{\widehat{\text{rec}}}x\cdot y$, 这里 A 表示 $2^{n\cdot n}$.

(3-3) $\widetilde{\text{ep}}(a, n)=\underset{x\to n}{\text{rti}}\,N\,\text{rs}(n, a^{St})$.

$a\cdot n\geqslant 2$ 时 $\widetilde{\text{ep}}(a, n)$ 可說是 n 中含有因子 a 的个数,即它为下方程組的 t 根: $\text{rs}(n, a^t)=0$, $\text{rs}(n, a^{St})\neq 0$. 問 $a\cdot n\leqslant 1$ 时結果如何?

(3-4) P_n(第 n 个质数．注意：$P_0=2$)．

我們知道，"t 为质数"当且仅当"t 的因子个数为 2"，亦即当且仅当 $\sum\limits_{x\to t} N\,\mathrm{rs}\,(t,\,x)=2$，故"$t$ 为质数"的特征函数为 $\mathrm{eq}\,(\sum\limits_{x\to t} N\,\mathrm{rs}(t,\,x),\,2)$．换言之，这函数的每一零点都是质数，从而"第 n 个质数"便恰巧是这函数的第 n 个零点(亦是从第 0 个零点数起)；如果該零点为 v，那就显然是在 v 以下(包括 v 在內)恰巧有 $n+1$ 个零点．故得

$$P_n=\mathop{\mathrm{rti}}_{v\to A}\mathrm{eq}\,(n+1,\,\sum_{t\to v}N(\mathrm{eq}\,(\sum_{x\to t}N\,\mathrm{rs}\,(t,\,x),\,2)))\,.$$

在緒論 §8 中已証明 $P_n\leqslant 2^{2^n}$，故可取 A 为 2^{2^n}．

(3-5) $\mathrm{ep}\,(a,\,n)=\widetilde{\mathrm{ep}}(P_a,\,n)$ (亦記为 $\mathrm{ep}_a\,n$)．

(3-6) $Hn=\mathop{\mathrm{rta}}\limits_{x\to Dn}\mathrm{rs}\,(n,\,P_x)$．

$\mathrm{ep}\,(a,\,n)$ 为 n 所含的 P_a 方幂，Hn 为 n 的最大质因子足碼．

利用(3-4)～(3-6)三个函数，可将 n 分解成质因子表示：

$$n=\prod_{t\to Hn}P_t^{\mathrm{ep}(t,\,n)}\quad(n\neq 0)\,.$$

以上便是最常用的三級初等函数(实际上，$\widetilde{\mathrm{ep}}$、ep 及 H 是零級的)，利用三級初等函数，还可定义下列算子：

$$(**)\quad \prod_{x\to n}f(x)=\mathop{\widehat{\mathrm{rec}}}_{(x,y)\to(A,f(0),n)}y\cdot f(Sx)\,,$$

这里 A 表示 $(\max\limits_{x\to n}f(x))^{Sn}$．

順次添入 $\varphi_n(u,\,x)$ (見第 109 頁)即得 **n 級初等函数集．**

习　题

1．試将下列各常見的数論函数表成(尽量低級的)初等函数．当依通常說法无意义时，則約定其値为 0．

(1) $\sigma_1(n)$：n 的約数之和；

(2) $\sigma_a(n)$：n 的約数的 a 次幂之和；

(3) $U(n)$：n 的不同质因子个数(相同的只算一个)；

(4) $U'(n)$：n 的质因子个数(相同的重复計算)；

(5) $\mu(n)=\begin{cases}1, & 当\ n=1\ 时,\\ 0, & 当\ n\ 为\ 1\ 以外的平方数的倍数时,\\ a^k, & 此外,这里\ k\ 指\ n\ 的不同质因子个数;\end{cases}$

(6) $\lambda(n)=\begin{cases}1, & 当\ n\ 为质数的方幂时,\\ 0, & 此外;\end{cases}$

(7) $\lambda'(n)=\begin{cases}1, & 当\ n=1\ 时,\\ a^k, & 此外,这里\ k\ 指\ n\ 的质因子个数;\end{cases}$

(8) $[\lg_a n]$;

(9) $\mathrm{dv}(a, b)$: a、b 的最大公約数 (但 $\mathrm{dv}(0, 0)=0$);

(10) $\mathrm{lm}(a, b)$: a、b 的最小正公倍数(当 $ab=0$ 时,約定它指 0);

2. 求出下列謂詞的特征数:

(1) n 为完全数(即: n 的因子和为 n 的两倍);

(2) m、n 为**亲和数**(即: m 及 n 的因子和均为 $m+n$).

§2 四个初等函数集(下)

定义 在初等函数的定义中,如将 $\widehat{\mathrm{rec}}$ 换为 $\widehat{\mathrm{inv}}$,所得的函数集叫做**副初等函数集**. 仿上,可有零級乃至 n 級的副初等函数集.

从本原函数出发,利用迭置,可由 $\widehat{\mathrm{rec}}$ 而表示 $\widehat{\mathrm{inv}}$,但却未能由 $\widehat{\mathrm{inv}}$ 而表示 $\widehat{\mathrm{rec}}$,故各級副初等函数集均为相应的初等函数集的子集.

現在依次討論各級副初等函数集.

(一) **零級副初等函数**

(0-1) $Dx=\widehat{\mathrm{inv}}_{t\to(x,x)} St\ (=\mathrm{rti}_{t\to x}\,\mathrm{eq}\,(St, x))$.

(0-2) $N^2x=\widehat{\mathrm{inv}}_{t\to(1,x)} Dt\ (=\mathrm{rti}_{t\to 1}\,\mathrm{eq}\,(Dt, x))$.

(0-3) $xNy=\widehat{\mathrm{inv}}_{t\to(x,N^2y)} 1\ (=\mathrm{rti}_{t\to x}\,\mathrm{eq}\,(1, N^2y))$.

(0-4) $Ny=1Ny$.

(0-5) $x+Ny=\widehat{\mathrm{inv}}_{t\to(Sx,Sx)} StN^2y\ (=\mathrm{rti}_{t\to Sx}\,\mathrm{eq}\,(StN^2y, Sx))$.

(0-6) $x \dot{-} Ny = \widehat{\operatorname{inv}}_{t\to(x,x)} StNy (= \operatorname{rti}_{t\to x} \operatorname{eq}(StNy, x))$.

(0-7) $\operatorname{eq}(x, y) = \widehat{\operatorname{inv}}_{t\to(1,y)} xNt (= \operatorname{rti}_{t\to 1} \operatorname{eq}(xNt, y))$.

由此,讀者不难験証:零級副初等函数集对命題联結詞是封閉的.

可作出下列算子:

(0.1) $\operatorname{rti}_{t\to n} f(t) = \widehat{\operatorname{inv}}_{t\to(n,0)} f(t)$.

(0.2) $\min_{x\to n} Nf(x) (= \prod_{x\to n} Nf(x)) = Nf(\operatorname{rti}_{x\to n} Nf(x))$.

(0.3) $\max_{x\to n} Nf(x) = Nf(\operatorname{rti}_{x\to n} f(x))$.

(二) **一級副初等函数**(添入开始函数 $x+y$)

(1-1) $x+y$ (新开始函数).

(1-2) $x-y = \widehat{\operatorname{inv}}_{t\to(x,x)} y+t (= \operatorname{rti}_{t\to x} \operatorname{eq}(y+t, x))$.

(1-3) $x \dot{-} y = (x-y)N(x-y+y-x)$.

(1-4) $x \dot{\dot{-}} y = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$.

(1-5) $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$.

(1-6) $\max(x, y) = x + (y \dot{-} x)$.

(1-7) $\left[\frac{x}{a}\right] = \widehat{\operatorname{inv}}_{t\to(x,0)} (Sx \dot{-} aSt)$ (a 为給定的数).

在一級副初等函数集中,可作出下列算子:

(1.1) $\operatorname{rta}_{x\to n} f(x) = n \dot{-} \operatorname{rti}_{x\to n} f(n \dot{-} x) Nf(\operatorname{rti}_{x\to n} f(x))$.

(1.2) $\max_{x\to n} f(x) = f(\operatorname{rti}_{x\to n} N \min_{t\to n} N^2(Sf(x) \dot{-} f(t)))$.

(1.3) $\min_{x\to n} f(x) = f(\operatorname{rti}_{x\to n} N \min_{t\to n} N^2(Sf(t) \dot{-} f(x)))$.

(三) **二級副初等函数**(添入开始函数 $x+y$、x^2)

(2-1) x^2 (新开始函数).

(2-2) $x \cdot y = [((x+y)^2 \dot{-} x^2 \dot{-} y^2)/2]$.

(2-3) $\left[\frac{x}{y}\right] = \widehat{\operatorname{inv}}_{t\to(x,0)} (Sx \dot{-} ySt)$.

(2-4) $\mathrm{rs}(x, y)=x \dot{-} y\cdot\left[\frac{x}{y}\right].$

(2-5) $[\sqrt{x}]=\underset{t\to(x,0)}{\widehat{\mathrm{inv}}}[Sx\dot{-}(St)^2].$

其余各函数便可仿前作出了(如 $T_a x$、$E_a x$、$pg_a(x, y)$、$L_a x$ 等等，其中包括 $\mathrm{tm}(x, w)$).

(四) **三級副初等函数**(添入开始函数 $x+y$、x^2、2^x)

可以証明，添入开始函数 $x+y$、x^2、2^x 后，可由 $\widehat{\mathrm{inv}}$ 而表示 $\widehat{\mathrm{rec}}$，从而 $n\geqslant 3$ 时 n 級副初等函数集便和 n 級初等函数集全同.

定理 1 三級副初等函数集与三級初等函数集全同.

証明 显然,三級副初等函数集是三級初等函数集的子集;今証三級初等函数集亦是三級副初等函数集的子集. 为此，只須証明:借助于三級副初等函数,可用 $\underset{t\to(u,n)}{\widehat{\mathrm{inv}}}$ 表示 $\underset{(x,y)\to(u,m,n)}{\widehat{\mathrm{rec}}}$ 便成了.

設 $g(u, m, n)=\underset{(x,y)\to(u,m,n)}{\widehat{\mathrm{rec}}} f(x, y)$，即

$$\begin{cases} g(u, m, 0)=m, \\ g(u, m, Sn)=f(\min(u, n), \min(u, g(u, m, n))), \\ g(u, m, n)\leqslant \max(m, \max\limits_{x\to u}\max\limits_{y\to u} f(x, y))\ (\equiv C_1). \end{cases}$$

今命

$$w_0=\underset{t\to n}{\mathrm{seq}}\, g(u, m, n),$$

从而有

$$\mathrm{tm}(i, w)=g(u, m, i),$$

故 w 应滿足条件

$$\mathrm{eq}(\mathrm{tm}(0, w), m)+\max_{t\to n}\mathrm{eq}(\mathrm{tm}(St, w),$$
$$f(\min(u, t), \min(u, \mathrm{tm}(t, w))))=0$$

(下文記为 $A(u, m, n, w)=0$). 由上述討論还知道: $w\leqslant pg(2^{(n+2)^2}2^{ns^2}, 2^{s^2})\ (\equiv C)$ (这里 $s=n+C_1$). 故得

$$w_0=\underset{w\to C}{\mathrm{rti}}\, A(u, m, n, w).$$

于是,

$$g(u, m, n)=\operatorname{tm}(n, w_0)=\operatorname{tm}(n, \operatorname*{rti}_{w\to C} A(u, m, n, w)).$$

换言之, $\widehat{\text{rec}}$ 可用 $\widehat{\text{rti}}$ (从而用 $\widehat{\text{inv}}$) 表示,定理得証.

順便指出,初等函数的名称最初是由 Kalmar 提出的,他給出的定义是:

定义 由本原函数及 $x+y$、$x\dot{-}y$、$x\cdot y$、$\left[\frac{x}{y}\right]$ 出发, 經过有限次迭置、迭加 $(\sum\limits_{x\to n})$、迭乘 $(\prod\limits_{x\to n})$ 所得到的函数叫做**初等函数**.

今証明 Kalmar 所引入的初等函数恰巧便是这里的三級初等函数. 在証明之前,先指出两点:

第一, 在这定义中, $x+y$、$x\cdot y$ 及 $\left[\frac{x}{y}\right]$ 可省. 因为:

$$x\cdot y=\sum_{i\to x} y\dot{-}y,$$

$$x+y=Sx\cdot Sy\dot{-}S(x\cdot y),$$

$$Nx=\prod_{i\to x}(i\dot{-}1),$$

$$N^2x=1\dot{-}Nx,$$

$$x\dot{-}y=(x\dot{-}y)\cdot N^2(y\dot{-}x+x\dot{-}y),$$

$$\left[\frac{x}{y}\right]=N^2y\cdot\sum_{i\to y}N(y\cdot(i+1)\dot{-}x)$$

$\left(\text{按一般习惯,約定}\left[\frac{x}{0}\right]=0\right)$. 显然, 把 "$x\dot{-}y$" 换为 "$x\dot{-}y$" 也可以,且更易作出.

第二, 有下列引理.

引理 对任何 $f(x, y)$, 有

$$\widehat{\operatorname*{rec}_{(x,y)\to(u,m,n)}} f(x, y)\leqslant m+\max_{x\to u}\max_{y\to u} f(x, y)$$

$$\leqslant m+\sum_{x\to u}\sum_{y\to u} f(x, y).$$

因此,当 f 对两变元均遞增时,左端便 $\leqslant f(u, u)$.

証明 命 $\widehat{\operatorname*{rec}_{(x,y)\to(u,m,n)}} f(x, y)=g(u, m, n)$, 則

$$g(u, m, Sn)=f(\min(u, n), \min(u, g(u, m, n)))$$
$$\leqslant \max_{x\to u}\max_{y\to u} f(x, y).$$

因 $g(u, m, 0)=m$，故得

$$\widehat{\operatorname{rec}}_{(x,y)\to(u,m,n)} f(x, y)\leqslant \max(m, \max_{x\to u}\max_{y\to u} f(x, y))$$
$$\leqslant m+\sum_{x\to u}\sum_{y\to u} f(x, y).$$

引理得証.

定理 2 Kalmar 所引入的初等函数集恰巧是这里所定义的三級初等函数集.

証明 Kalmar 定义中所用的开始函数均在三級初等函数集中(分別为一級,零級,二級,零級)，而 $\sum\limits_{x\to n}$ 及 $\prod\limits_{x\to n}$ 均可作出(分別在二級,三級中)，故 Kalmar 所定义的初等函数均为三級初等函数.

反之，三級初等函数集的开始函数(本原、$x+y$、x^2、2^x)均在 Kalmar 所定义的函数集中，因：

$$x^2=x\cdot x,\quad 2^x=[(\prod_{t\to x}2)/2].$$

至于加限原始递归式，也可在 Kalmar 所定义的函数集中加以表示. 設将 $\widehat{\operatorname{rec}}_{(x,y)\to(u,m,n)} f(x, y)$ 表为 $g(u, m, n)$. 根据引理，有

$$g(u, m, n)\leqslant m+\sum_{x\to u}\sum_{y\to u} f(x, y)\quad (\text{以后記之为 } C).$$

在所定义的函数集中可以表示 rti (当有零点时)：

$$\operatorname{rti}_{x\to n} f(x)=\sum_{x\to n}\prod_{t\to x} N^2 f(t).$$

因而，仿上可定义 P_n 及 $\operatorname{ep}(a, n)$. 再定义：

$$w(u, m, n)=\operatorname{rti}_{x\to A}(\operatorname{eq}(\operatorname{ep}_0 x, m))$$
$$+\sum_{t\to u}\operatorname{eq}(\operatorname{ep}_{t+1}x, f(\min(t, u), \min(u, \operatorname{ep}_t x))).$$

这里 A 表示 $P_{n+1}^{SSn\cdot C}$. 容易驗証

$$w(u, m, n)=\prod_{x\to Sn} P_x^{g(u,m,x)}.$$

于是

$$g(u,\ m,\ n)=\mathrm{ep}_n w(u,\ m,\ n).$$

故加限递归式也可在 Kalmar 所定义的函数集中加以表示．从而各三級初等函数均在 Kalmar 所定义的函数集中．定理得証．

由上可見，当用 $\widehat{\mathrm{inv}}$ 来代替 $\widehat{\mathrm{rec}}$ 时，使用同样的开始函数，却得出不同的零級、一級、二級函数集，但三級(及以后各級)函数集又是相同的．可以驗証：如果增加开始函数 Nx 而改用 $\min\limits_{x\to n}$，或 $\max\limits_{x\to n}$，或 $\sum\limits_{x\to n}$，或 $\sum\limits_{x\to n} N$，情况也是一样：相应的零級、一級、二級函数集是不同的，但相应的三級(及以后各級)函数集却全是一样的，而三級函数集恰是 Kalmar 最初提出"初等函数"这个概念时所引入的函数集．这一切都給我們一个启示：三級初等函数集是一个很为重要的初等函数集．

在上面的定义中，三級初等函数集是由开始函数 $x+y$、$x\cdot y$、2^x 出发，使用迭置及某个初等算子(或 $\widehat{\mathrm{rec}}$，或 $\widehat{\mathrm{inv}}$，或 $\mathrm{rti}\limits_{x\to n}$ 等)而作成的．按 Kalmar 的定义，則是由 $x+y$、$x\dot{-}y$、$x\cdot y$、$[x/y]$ 出发，使用迭置及两个初等算子 $\sum\limits_{x\to n}$ 及 $\prod\limits_{x\to n}$ 而作成的．这样的結构未免复杂，今另給出一个更好的构造方法．試命

$$\prod_{x\to(m,n)} f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } n<m \text{ 时},\\ \prod\limits_{x\to n\dot{-}m} f(x+m), & \text{当 } n\geqslant m \text{ 时}.\end{cases}$$

定理 3 三級初等函数集可由本原函数出发，使用迭置及初等算子 $\prod\limits_{x\to(m,n)}$ 而作成．

証明 这里依次作出下列函数及算子：

*(1) $x^y=\prod\limits_{i\to(1,y)} x$ (从而可作出 2^x)．

(2) $\prod\limits_{i\to n} f(i)=\prod\limits_{i\to(0,n)} f(i)$.

(3) $Nx=0^x$.

(4) $N(x\dot{-}y)=\prod\limits_{i\to(Sy,x)} 0$.

(5) $\mathrm{eq}(x, y) = N^2(x \dot{-} y)^{0^{N^2(x \dot{-} y)}}$.

(6) $\varphi(x)$(暂用) $= (x^{Nf(Sx)})^{N^2 \prod\limits_{i \to (1, x)} f(i)}$,

則有:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } Sx \text{ 为 } f(i) \text{ 的最小正零点时,} \\ 1, & \text{当 } Sx \text{ 非 } f(i) \text{ 的最小正零点时.} \end{cases}$$

(7) $\underset{x \to n}{\mathrm{rt}} f(x)$(暂用) $= \prod\limits_{i \to (0, n)} \varphi(i)$,

則

$$\underset{x \to n}{\mathrm{rt}} f(x) = \begin{cases} f(i) \text{ 的在 } Sn \text{ 以下的最小正零点减 } 1, & \text{当有正零点时,} \\ 1, & \text{当 } f(i) \text{ 在 } Sn \text{ 以下无正零点时.} \end{cases}$$

(8) $\widetilde{D}x$(暂用) $= \underset{t \to x}{\mathrm{rt}}\, \mathrm{eq}(t, x)$,

則

$$\widetilde{D}x = \begin{cases} Dx, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

(9) $\underset{x \to n}{\mathrm{rt}} f(\widetilde{D}x)$ 显然为 $f(\widetilde{D}x)$ 在 Sn 以下的最小正零点减 1, 亦即 $f(x)$ 在 n 以下的最小零点, 换言之,

$$\underset{x \to n}{\mathrm{rt}} f(\widetilde{D}x) = \begin{cases} \underset{x \to n}{\mathrm{rti}}\, n(x), & \text{当 } f \text{ 在 } n \text{ 以下有零点时,} \\ 1, & \text{当 } f \text{ 在 } n \text{ 以下无零点时,} \end{cases}$$

这算子暂記为 $\underset{x \to n}{\widetilde{\mathrm{rti}}} f(x)$.

*(10) $x \cdot y = \underset{t \to (2^x)^y}{\widetilde{\mathrm{rti}}}\, \mathrm{eq}(2^t, (2^x)^y)$.

*(11) $x + y = \underset{t \to 2^x 2^y}{\widetilde{\mathrm{rti}}}\, \mathrm{eq}(2^t, 2^x 2^y)$.

*(12) $\underset{x \to (u, n)}{\widehat{\mathrm{inv}}} f(x) = \underset{x \to u}{\widetilde{\mathrm{rti}}}\, \mathrm{eq}(f(x), n) \cdot \mathrm{eq}(x, u)$.

由 (1)、(10)、(11)、(12) 卽知: 根据本定理所作出的函数集包含了副三級初等函数集. 另一方面, 易証由本定理所作出的函数集包含于三級初等函数集之中. 定理得証.

习　　題

1．求出下列迭加式的結果：

(1) $\sum\limits_{x\to n}\mathrm{rs}(x+1,2)$;　　(2) $\sum\limits_{x\to n}x^a$　$(a=2,3,4)$;

(3) $\sum\limits_{x\to n}NE_a(x+1)$　(又，将 E_a 改为 L_a、$\overline{L}_a$、$\widetilde{L}_a$)；

(4) $\sum\limits_{x\to n}aN\,\mathrm{rs}(E_a(x+1),2)$　(又，将 E_a 改为 L_a、$\overline{L}_a$、$\widetilde{L}_a$)．

2．求証：

(1) $\sum\limits_{x\to n}n\cdot f(x)$ 与 $\sum\limits_{x\to n}n\cdot f(x)+f(n)$ 为 n 的不减函数；

(2) $\sum\limits_{x\to n}n\cdot f(x)+n$ 与 $\sum\limits_{x\to n}n\cdot f(x)+n+f(n)$ 为 n 的严格递增函数；

(3) 任一函数 $f(x)$ 恒可表成两个不减函数(两个严格递增函数)之差．

3．在数論中，用 $\sum\limits_{t/n}f(t)$ 表示按 n 的約数 t 而求和，試将它用已学过的初等算子表示．

4．将 $g(x)$ 的值的規律用簡单語言叙述出来：

(1) $\begin{cases} g(0)=0, \\ g(Sx)=2f(x)Nf(x)+N^2f(x)\cdot(2\sum\limits_{i\to x}f(i)\dot{-}1); \end{cases}$

(2) $g(x)=2f(x)Nf(x)+N^2f(x)\cdot(2\sum\limits_{i\to x}f(i)\dot{-}3)$;

(3) $\begin{cases} g(2x+1)=2x+1+2\sum\limits_{i\to x}N^2f(i), \\ g(2x)=a(x)Nf(x)+N^2f(x)\cdot(2x\dot{-}1+2\sum\limits_{i\to x}N^2f(i)). \end{cases}$

5．設已給出函数 $a(x)$、$b(x)$、$c(x)$、$d(x)$，且已知 $x_1\neq x_2$ 时永有 $a(x_1)\neq a(x_2)$，求作函数 $f(x)$，使得

$$f(a(x))=b(x),\ 当\ c(x)=0\ 时;$$

此外則 f 順次取值 $d(0)$, $d(1)$, $d(2)$, $\cdots$．

6．試証：借助于一元二級副初等函数后，(作用于一元函数的)有 * 算子 $\widehat{\mathrm{inv}}^*$ 可用无参数的算子 $\widehat{\mathrm{inv}}$ 或用无参数的 $\mathrm{rta}_{x\to n}$ 表示．故从适当的一元函数出发，由(1, 1)迭置及 $\widehat{\mathrm{inv}}$ (或 $\mathrm{rta}_{x\to n}$) 即可以作出二級以上一元副初等函数集．

7．試証：任給 a、b，恒有 x、y 使得 $ax\dot{-}by=\mathrm{dv}(a,b)$，并試将 x、y 表成 a、b 的(尽量低級)初等函数，能否表成熟知函数的迭置？

8．設仍由开始函数 $\varphi_n(u,x)$ (并增加 Nx 作开始函数)出发，但改用算子

$$\min_{x\to n},\quad \max_{x\to n},\quad \sum_{x\to m}N,\quad \sum_{x\to n}$$

之一时，所得的各級函数集是怎样的？

§3 初等函数集的一些重要性质

現在将討論各級初等函数集的一些重要性质. 显然，它們对命題联接詞及受限量詞均封閉. 此外，容易用数学归納法証得下定理.

定理 1 如果 $f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y)$，且 f_2 至少对 y 为递增，則

$$\operatorname*{rec}_{(x,y)\to(m,n)} f_1(x, y) \leqslant \operatorname*{rec}_{(x,y)\to(m,n)} f_2(x, y),$$

$$\operatorname*{\widehat{rec}}_{(x,y)\to(u,m,n)} f_1(x, y) \leqslant \operatorname*{\widehat{rec}}_{(x,y)\to(u,m,n)} f_2(x, y).$$

由此，不难証得

定理 2 如有一数 c 及一严格递增函数 $g(x)$，使得对每个本原函数或开始函数 $A_i(x_1, \cdots, x_n)$，恒有一数 h_i，使得

$$A_i(x_1, \cdots, x_n) \leqslant g^{h_i}(u)$$

（这里以及証明中，将以 u 表示 $\max(c, x_1, \cdots, x_n)$）. 那末，任給一个初等于 A_i 的函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，永可找出一数 h，使得

$$f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant g^h(u).$$

証明 根据 f 的組成而归納.

奠基： 当 f 为开始函数 A_i 时，h 即題給的 h_i.

归納： 如果 f 由迭置組成，設 $f=A(B_1, \cdots, B_m)$，依归納假設，有 h_0 及 h_i，使得

$$A(a_1, \cdots, a_m) \leqslant g^{h_0}(\max(c, a_1, \cdots, a_m)),$$

$$B_i(x_1, \cdots, x_n) \leqslant g^{h_i}(u) \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

故

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) = A(B_1, \cdots, B_m) &\leqslant g^{h_0}(\max(c, g^{h_1}(u), \cdots, g^{h_m}(n))) \\ &\leqslant g^{h_0}(g^k(u)) \quad (k=\max(h_1, \cdots, h_m)) \\ &= g^{h_0+k}(u). \end{aligned}$$

故在这情形可取 h 为 $h_0+\max(h_1, \cdots, h_m)$.

如果 f 由加限原始递归式得来，設

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(x_1,x_2,x_3)} B(x_4, \cdots, x_n, x, y),$$

依归納假設，有 h_0 使

$$B(x_4, \cdots, x_n, x, y) \leqslant g^{h_0}(\max(c, x_4, \cdots, x_n, x, y)).$$

并注意 g 为严格递增函数，故根据上节定理，应有：

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(x_1,x_2,x_3,)} g^{h_0}(\max(c, x_4, \cdots, x_n, x, y)) \\
&\quad \leqslant \max(x_2, g^{h_0}(\max(c, x_4, \cdots, x_n, x_1, x_1))) \\
&\quad \leqslant \max(u, g^{h_0}(u)) \\
&\quad = g^{h_0}(u).
\end{aligned}$$

再根据本节定理 1，有

$$\widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(x_1,x_2,x_3)} B \leqslant \widehat{\mathrm{rec}}_{(x,y)\to(x_1,x_2,x_3)} g^{h_0} \leqslant g^{h_0}(u).$$

故这时可取 h 为 h_0.

依数学归納法，本定理得証.

定义 如果对集 $\varDelta$ 中任一函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，恒有一数 h，使得

$$f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant g(h, u) \quad (u = \max(c, x_1, \cdots, x_n)),$$

则 $g(t, x)$ 叫做集 $\varDelta$ 的**控制函数**.

因此，上定理便給出一个求初等于 A_t 的函数集的控制函数的方法.

根据这定理，即获得下列的結果.

零級初等函数的开始函数只有三个(即本原函数)，显然，$Ox < Sx$ 且 $I_{mn}(x_1, \cdots, x_m) = x_n \leqslant Sx_n$，故只考虑 Sx 即够. 由于

$$Sx \leqslant Su \quad (u = \max(0, x_1, \cdots, x_m)),$$

因此，对任何零級初等函数 f，均有 h 使得

$$f(x_1, \cdots, x_n) = S^h u = u + h \quad (u = \max(0, x_1, \cdots, x_n)).$$

从而 $x+y$ 或 $2x$ 决非零級初等函数，因不存在 h 使对一切 x、y 均有：

$$x + y \leqslant \max(x, y) + h, \quad 2x \leqslant x + h.$$

一級初等函数的开始函数又多了 $x+y$ 一个，由于

$$Sx\leqslant 2u,\quad x+y\leqslant 2u\quad (u=\max(1,\ x,\ y)),$$

因此，对任何一級初等函数 f，均有 h 使得

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)\leqslant \underset{y\to(u,h)}{\text{itr}}\ 2y=2^h u\quad (u=\max(1,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)),$$

即恒有 k 使得

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)\leqslant ku,$$

从而 $x\cdot y$ 或 x^2 决非一級初等函数，因沒有 k 使对一切 x、y 均有：

$$x\cdot y\leqslant k\cdot u,\quad x^2\leqslant k\cdot u\quad (u=\max(1,\ x,\ y)).$$

二級初等函数的开始函数又多了 x^2 一个，因为

$$Sx\leqslant u^2,\quad x+y\leqslant u^2\quad x^2\leqslant u^2\quad (u=\max(2,\ x,\ y)).$$

因此，对任何二級初等函数 f，均有 h 使得

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)\leqslant \underset{y\to(u,h)}{\text{itr}}\ y^2=u^{2h}\quad (u=\max(2,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)).$$

从而 y^x 或 2^x 决非二級初等函数，因沒有 h 使对一切 x、y 均有：

$$y^x\leqslant u^{2h},\quad 2^x\leqslant u^{2h}\quad (u=\max(2,\ x,\ y)).$$

三級初等函数的开始函数又多一个，即 2^x，因

$$Sx\leqslant 2^u,\quad x+y\leqslant 2^u,\quad x^2\leqslant 2^{2^u},\quad 2^x\leqslant 2^u\quad (u=\max(0,\ x,\ y)).$$

因此，对任何三級初等函数 f，均有 h 使得

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)\leqslant \underset{y\to(u,h)}{\text{itr}}\ 2^y.$$

因此二元函数（作为 h 与 u 的二元函数）$\underset{y\to(u,h)}{\text{itr}}\ 2^y$ 决非三級初等函数．这是因为，如果 $\underset{y\to(x_1,x_2)}{\text{itr}}\ 2^y$ 为三級初等函数，则 $S\underset{y\to(x_1,x_2)}{\text{itr}}\ 2^y$ 亦然．因此，应有 h 使得

$$S\underset{y\to(x_1,x_2)}{\text{itr}}\ 2^y\leqslant \underset{y\to(u,h)}{\text{itr}}\ 2^y\quad (u=\max(0,\ x_1,\ x_2)).$$

这时可对 x_1 及 x_2 均代以 h，从而 $u=\max(0,\ h,\ h)=h$，上式变成

$$S\underset{y\to(h,h)}{\text{itr}}\ 2^y\leqslant \underset{y\to(h,h)}{\text{itr}}\ 2^y,$$

这是一矛盾．由这矛盾即可推知：$\underset{y\to(u,h)}{\text{itr}}\ 2^y$ 决非三級初等函数．

对于零級、一級、二級初等函数集的控制函数，亦可用这方法

証明它們分别不属于零級、一級、二級初等函数集.

定理 3 如果一函数集含有 Sx, 且对迭置封閉,則該函数集的控制函数不可能属于該函数集.

推論 二元函数 $\varphi_{n+1}(u, x)$ 不在 n 級初等函数集中.

函数 $\underset{y\to(u,h)}{\mathrm{itr}}\ 2^y$ 是很有趣的,設将它記为 $g(h, u)$, 则有:

$$g(0, u)=u,$$
$$g(1, u)=2^u,$$
$$g(2, u)=2^{2^u},$$
$$g(3, u)=2^{2^{2^u}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

关于这函数有很多有趣的性质,我們将这些放在习題中,讀者可自己加以証明.

值得指出, 在数論中曾証明(見华罗庚著《数論导引》第五章 §11): 存在一实数 α, 使得

$$[u_0]=[\alpha],$$
$$[u_1]=[2^{u_0}],$$
$$[u_2]=[2^{u_1}],$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$
$$[u_{n+1}]=[2^{u_n}],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

都是质数. 換言之,使得一切$[\underset{y\to(\alpha,n)}{\mathrm{itr}}\ 2^y]$均为质数. 这是作者迄今在数論中(解析数論中使用的函数除外)看見的唯一的非三級初等函数的例子.

习 題

1. 問下列函数是哪一級的初等函数? 不可能是哪一級的初等函数?

(1) $n!$; (2) $2^{[\sqrt{n}]}$.

2. 即使可找出一数 c, 使得当 $x\geqslant c$ 时 $f(x)\geqslant A(x)$, 但当 $A(x)$不在某級初等函数集之內时 $f(x)$ 也可能属于該函数集. 試举一例.

3. 設 $\begin{cases} f(a, 0)=a, \\ f(a, Sn)=2^{f(a,n)}, \end{cases}$ 求証:

(1) $f(a, n)$对 a 及对 n 均严格递增,故$f(a, n)\geqslant a$;

(2) $f(a, m+n)=f(f(a, m), n)$;

(3) 当 $a\geqslant 2$ 时 $f(a, n+2)\geqslant (f(a, n+1))^2$;

(4) $f(a, n+3)>f(a, n+1)^{f(a, n+1)}$.

4. 設 $\begin{cases} f(a, 0)=a, \\ f(a, Sn)=a^{f(a,n)}, \end{cases}$ 求証:

(1) $f(a, n)$对 a 严格递增, 从而$f(a, n)\geqslant a$, 当 $a\geqslant 2$ 时, 对 n 也严格递增;

(2) $f(f(a, m), n)\leqslant f(a, m+2n)$. 問下式是否成立:

$$f(f(a, m), n)=f(a, m+n)?$$

(3) 当 $a\geqslant 2$ 时, $f(a, n+1)\geqslant f(a, n)^2$;

(4) 当 $a\geqslant 2$ 时, $f(a, n+2)>f(a, n)^{f(a,n)}$.

§4 最强的初等算子

在討論最强的初等算子之前,最好先就較一般的情形討論.

定义 如果 $\widehat{K}(n, i, x)$为相应于叙列算子 $\underset{x\to y}{J}$ 的求項函数,則 $\underset{x\to y}{\alpha}\widehat{K}(n, x, v)$叫做相应于$J$ 的 $\underset{x\to y}{\alpha}$ 的**示性函数**.

回忆一下算子 α 的模的定义,它指的是在求 $\underset{x\to y}{\alpha}f(x)$时所須使用的$f$ 值的变元的上界. α 的模算子記为 $\underset{x\to y}{\tilde{\alpha}}$. 对初等算子 α 說来,模退化为模函数.

定理 1 任給一算子 $\underset{x\to y}{\alpha}$, 它恒可由叙列算子 $\underset{x\to y}{J}$ 、α 的模(模算子 $\tilde{\alpha}$ 或模函数 G) 及 α 的相应示性函数而表示.

証明 試把 α 的模記为 s($s=\underset{x\to y}{\tilde{\alpha}}f(x)$或 $s=G(y)$). 由模的定义, 当求 $\underset{x\to y}{\alpha}f(x)$ 时,只使用下列的 f 值:

$$f(0), f(1), \cdots, f(s).$$

依叙列算子 $\underset{x\to n}{J}$ 的定义(見第一章 §4), 可知

$$\widehat{K}(s, x, \underset{t\to s}{J} f(t)) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant s),$$

故得

$$\underset{x\to y}{\alpha} \widehat{K}(s, x, \underset{t\to s}{J} f(t)) = \underset{x\to y}{\alpha} f(x).$$

但左端函数 $\widehat{K}$ 的第一、第三变元均与作用变元 x 无关,故可先作

$$\underset{x\to y}{\alpha} \widehat{K}(u, x, v) = M(u, y, v) \quad (\text{它即示性函数}),$$

将 u 代以 s 而 v 代入以 $\underset{t\to s}{J} f(s)$, 即得

$$\underset{x\to y}{\alpha} \widehat{K}(s, x, \underset{t\to s}{J} f(t)) = M(s, y, \underset{t\to s}{J} f(t)).$$

即 $\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 可用 M、s 及 $\underset{t\to s}{J} f(t)$ 而表示. 定理得証.

当 α 为高級算子时, s 仍須由算子 $\tilde{\alpha}$ 求出, 故这时本定理的价值不大. 但当 α 为初等算子时,根据本定理即能推出下述結果:

定理 2 (i) 每一个初等算子都可由任一叙列算子 $\underset{x\to y}{J}$ 而表示. 由于 $\underset{x\to y}{J}$ 显然是初等算子, 故知每一个叙列算子 $\underset{x\to y}{J}$ 都是最强的初等算子. (ii) 当 α 的模 s 为常数时,算子 α 退化为迭置.

証明 (i) 对初等算子 α 說来,模 (s) 可由模函数求得. (ii) 由第一章 §4 可見, 当 s 为常数时, $\underset{t\to s}{J} f(t)$ 可用若干函数、f 及迭置表示. 定理得証.

定理 3 $\underset{x\to n}{\prod}$、$\underset{x\to n}{\mathrm{rti}}$、$\underset{x\to n}{\mathrm{rta}}$、$\underset{x\to(u,n)}{\widehat{\mathrm{inv}}}$、$\underset{(x,y)\to(n,u,v)}{\widehat{\mathrm{rec}}}$、$\underset{x\to(n,u,v)}{\widehat{\mathrm{itr}}}$、$\underset{x\to n}{\sum}$、$\underset{x\to n}{\sum} N$、$\underset{x\to n}{\min}$、$\underset{x\to n}{\max}$ 都是最强的初等算子.

証明 上文已指出, $\underset{x\to n}{\prod} P_x^{f(x)}$ 可取作叙列算子 $\underset{x\to n}{J} f(x)$; 既然它可由 $\underset{x\to n}{\prod}$ 作出,故 $\underset{x\to n}{\prod}$ 是最强初等算子.

但 $\underset{x\to n}{\prod} P_x^{f(x)} = \underset{w\to c}{\mathrm{rti}}\ \underset{t\to n}{\max}(\mathrm{ep}_t w \dot{-} f(t))$ (c 表 $P(n)^{(n+1)\max\limits_{t\to n} f(t)}$),

而 $\underset{x\to n}{\mathrm{rti}}$ 与 $\underset{x\to n}{\max}$ 可互相表示如下:

$$\underset{x\to n}{\max} f(x) = f(\underset{x\to n}{\mathrm{rti}}(Sn \dot{-} \underset{t\to Sn}{\mathrm{rti}}(Sf(x) \dot{-} f(t)))),$$

$$\underset{x\to n}{\mathrm{rti}} f(x) = n \dot{-} \underset{x\to n}{\max}(n \cdot Nf(x) \dot{-} x),$$

故 $\max\limits_{x\to n}$ 及 $\operatorname{rti}\limits_{x\to n} f(x)$ 都是最强的初等算子．此外，

$$\operatorname{rti}_{x\to n} f(x)=n\dot{-}\operatorname{rta}_{x\to n} f(n\dot{-}x)Nf(\operatorname{rta}_{x\to u} f(x)),$$

$$\operatorname{rti}_{x\to n} f(x)=\widehat{\operatorname{rec}}_{(x,y)\to(n,0,u)}(y+N^2f(y))=\widehat{\operatorname{itr}}_{y\to(n,0,n)}(y+N^2f(y)),$$

$$\operatorname{rti}_{x\to n} f(x)=\min_{x\to n}(x+n\cdot N^2f(x)),$$

$$\operatorname{rti}_{x\to n} f(x)=N^2n\cdot\sum_{x\to Dn}N\sum_{t\to x}Nf(t),$$

故 $\operatorname{rta}\limits_{x\to n}$、$\widehat{\operatorname{rec}}\limits_{(x,y)\to(n,0,n)}$、$\widehat{\operatorname{itr}}\limits_{y\to(n,0,n)}$、$\min\limits_{x\to n}$、$\sum\limits_{x\to n}N$（$\sum\limits_{x\to n}$ 当然）也是最强的初等算子．$\widehat{\operatorname{inv}}$ 以 $\operatorname{rti}\limits_{x\to n}$ 为特例当然也是最强的．定理得証．

无参数的 $\widehat{\operatorname{inv}}\limits_{x\to(u,n)} f(x)$ 也是最强的初等算子，这一点可証明如下：試取对 y 递增的 $pg(x, y)$ 并将 $pg(t, n)$ 縮写为 v，則有

$$\operatorname{rti}_{x\to n} f(t, x)=L\widehat{\operatorname{inv}}_{z\to(v,t+1)}(Kz+1)N(z\dot{-}pg(Kz, Lz)Nf(Kz, Lz)), \quad (1)$$

命(1)式左端的零点为 x_0，右端的逆函数的值为 z_0，則 z_0 为

$$(Kz+1)N(z\dot{-}pg(Kz, Lz)Nf(Kz, Lz))=t+1 \qquad (2)$$

的根，故必 $z_0=pg(Kz_0, Lz_0)$，且 $Kz_0+1=t+1$（故 $Kz_0=t$）及 $f(t, Lz_0)=0$，卽 Lz_0 必为(1)式左端一零点．反之，如果 x_0 为(1)式左端一零点，則 $pg(t, x_0)$ 必为方程(2)的零点，因此易見两者的零点一一对应，从而最小的 x_0 对应于最小的 z_0，这样，等式(1)便成立了，断言于是得証．至于别的无参数算子，将在习題中討論．

注意：虽然 $\sum\limits_{x\to n}N$ 是最强的初等算子，但 $\prod\limits_{x\to n}N$、$\min\limits_{x\to n}N$、$\max\limits_{x\to n}N$ 却似乎不是最强的初等算子．今后称这三者为**初基算子**．

最强的初等算子还不止上述这些．

定理 4 設 pg 为任意一个配对合函数，則迭 pg 算子 $\underset{x\to n}{pg}$ 便是最强的初等算子．

証明 因 $\underset{x\to n}{pg}$ 也是一个叙列算子（見第一章 §4）．

定理 5 如果二元函数 $A(x,y)$ 具有弱么元素 $e(y)$，卽它满足：

$$\text{当 } x \leqslant y \text{ 时}, A(e(y), x) = A(x, e(y)) = x,$$

又有一数 c，使得

$$i \leqslant y \text{ 时}, A^i \underbrace{cc\cdots c}_{i+1\text{个}} \neq e(y),$$

则迭 A 算子 $\underset{x\to y}{A}$ 便是最强的初等算子.

証明 可依次作出 $\underset{x\to y}{\mathrm{rti}} f(x)$ 如下：

先定义

$$f_1(x, y) = cNf(x) + e(y)N^2f(x)$$

（当 $f(x)=0$ 时，$f_1(x, y)=c$；当 $f(x)\neq 0$ 时，$f_1(x, y)=e(y)$）

再定义

$$f_2(x, y) = f(x) + \underset{t\to Dx}{A}(f_1(x, y) \dot{-} e(y))N^2x$$

（当 x 为 f 的最小零点时，$f_2(x, y)=0$；否則，$f_2(x, y)\neq 0$）.

再定义

$$f_3(x, y) = xNf_2(x, y) + e(y)N^2f_2(x, y)$$

（当 x 为 f 的最小零点时，$f_3(x, y)=x$；否則，$f_3(x, y)=e(y)$）.

于是

$$\underset{x\to y}{\mathrm{rti}} f(x) = \underset{x\to y}{A} f_3(x, y)$$

（当 f 在 y 以下无零点时，右端表 $e(y)$）.

既能由 $\underset{x\to y}{A}$ 而作出 $\underset{x\to y}{\mathrm{rti}}$，于是定理得証.

根据本定理可再次看到：$\underset{x\to y}{\min}$、$\underset{x\to y}{\max}$、$\underset{x\to y}{\sum}$、$\underset{x\to y}{\prod}$ 为最强的初等算子（min、max、+、0 的弱幺元素分别为 y、0、0、1）；此外，只要

$$A(0, x) = A(x, 0) = 0,$$

$$A(x+1, y+1) \neq 0,$$

那末 $\underset{x\to y}{A}$ 便是最强的初等算子. 讀者对此可自行証之.

根据上两定理，可以作出任意多个最强的初等算子.

是否一切初等算子都是最强初等算子呢？这似乎未必. 例如，

$\prod\limits_{x\to y} N$、$\min\limits_{x\to y} N$、$\max\limits_{x\to y} N$ 看来很可能不是最强初等算子，它們的力量看来是很弱的（它們三者之間可以互相表示，見第 93 頁）。

此外，也沒有办法从 $\mathrm{rtu}_{x\to y}$、$\mathrm{unv}_{x\to y}$ 自身便表示 $\mathrm{rti}_{x\to y}$，因此，这两个算子很可能也不是最强的初等算子。

奇怪的是：$(\mathrm{rtu}_{x\to y}、\max\limits_{x\to y} N)$ 及 $(\mathrm{unv}_{x\to(u,n)}、\max\limits_{x\to y} N)$ 却是最强的初等算子組。因为有：

$$\mathrm{rti}_{x\to y} f(x)=\mathrm{rtu}_{x\to y}\left(f(x)+N^2x\cdot\max_{t\to Dx} Nf(x)\right)$$

及

$$\widehat{\mathrm{inv}}_{x\to(u,n)} f(x)=\widehat{\mathrm{unv}}_{x\to(Su,Sn)}\left[Nx\cdot Sf(0)+N^2x\cdot Sf(x)\cdot\left(\min_{t\to Dx} N^2(f(x)\dot{-}f(t))\right)\right].$$

后一式可如下証明：命右端中 $\widehat{\mathrm{unv}}$ 的作用域为 $g(x)$，容易驗証：

$$g(x)=\begin{cases} Sf(x), & \text{当 } f(x) \text{ 取得新値时,}\\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 取旧值（已取过之値）时.}\end{cases}$$

显然，$g(x)$ 取非零値至多一次，并且当 $f(x)=n$（第一次值）时有 $g(x)=Sn$。因此，显然有 $\widehat{\mathrm{inv}}_{x\to(u,n)} f(x)=\widehat{\mathrm{unv}}_{x\to(Su,Sn)} g(x)$.

这事实告訴我們：看来 $\mathrm{rtu}_{x\to y}$ 及 $\widehat{\mathrm{unv}}$ 均不能表示很弱的初基算子（如 $\min\limits_{x\to y} N$ 等），但与这种很弱的初基算子合并后却能表示最强的初等算子。

习　题

1．試証：如果 pg、K、L 为一一对应的配对函数組，則

$$\mathrm{rti}_{x\to n} f(t,x)=L\,\widehat{\mathrm{inv}}_{z\to(pg(t,n),\,t+1)}((Kz+1)Nf(Kz,Lz)).$$

2．設用"$\alpha(a)$——β"表示：借助于 a 級初等函数后，可由算子 α 来表示算子 β；又用"$\alpha(a)$——$\beta(b)$"表示：借助 a 級初等函数后，可由 α 来表示 β，且借助于 b 級初等函数后，可由 β 表示 α。試将下列各算子互相表示时所須

使用的初等函数的級数求出，需尽量把級数降低：

(1) $\prod\limits_{x\to n}$；　(2) $\sum\limits_{x\to n}$；　(3) $\sum\limits_{x\to n} N$；　(4) $\operatorname*{rti}\limits_{x\to n}$；

(5) $\operatorname*{rta}\limits_{x\to n}$；　(6) $\widehat{\operatorname*{inv}}\limits_{x\to(u,n)}$；　(7) $\operatorname*{rec}\limits_{(x,y)\to(u,m,n)}$；　(8) $\widehat{\operatorname*{itr}}\limits_{x\to(u,m,n)}$；

(9) $\min\limits_{x\to n}$；　(10) $\max\limits_{x\to n}$；　(11) $\widetilde{\operatorname*{rti}}\limits_{x\to n}$；　(12) $\widetilde{\operatorname*{rta}}\limits_{x\to n}$.

这里(及以后)用 $\widetilde{\operatorname*{rti}}\limits_{x\to n} f(x)$ 表示($\widetilde{\operatorname*{rta}}\limits_{x\to n}$ 仿此)：

$$\begin{cases}\operatorname*{rti}\limits_{x\to n} f(x), & \text{当 } n \text{ 以下 } f(x) \text{有零点时},\\ \alpha(n)\text{(一个預先指定的函数)}, & \text{此外}.\end{cases}$$

注意：　我們有 $\sum\limits_{x\to n} N(2)$——$\sum\limits_{x\to n}$，因可証：

$$\sum_{x\to n} f(x)=\sum_{x\to v8n\dot{-}1} N^2\left(f\left[\frac{x}{v}\right]\dot{-}\operatorname{rs}(x,v)\right)\quad (v \text{ 表示 } \max_{x\to n} f(x)).$$

3．直接証明：容許参数的 $\widehat{\operatorname{inv}}$ 可用无参数的 $\widehat{\operatorname{inv}}$ 表示．例如，証明(下式中 pg 是递增的，K、L 为相应的左右函数，而 U 为 pg^2xtu 的縮写)：

$$\widehat{\operatorname*{inv}}_{y\to(u,x)} f(t,y)=L\widehat{\operatorname*{inv}}_{z\to U,\,Spg(x,t)}\{SKzN\operatorname{eq}(f(LKz,Lz),K^2z)\cdot N\operatorname{eq}(z,pg(Kz,Lz))\}.$$

4．(1) 試証无参数的 $\widehat{\operatorname{rec}}$、$\widehat{\operatorname{itr}}$、$\Sigma$、$\Sigma N$、$\Pi$、$\operatorname*{rta}\limits_{x\to n}$ 亦是最强的初等算子；

(2) 試証：容許参数的上述算子可分别用无参数的同名算子表示．

5．試檢查：无参数的 min、max 或 $\operatorname*{rti}\limits_{x\to n}$ 是否可以作最强的初等算子？用它們能否直接表示 min、max 或 $\operatorname*{rti}\limits_{x\to n}$？

6．容許参数的 $\widehat{\operatorname{rtu}}$ 或 $\widehat{\operatorname{unv}}$ 是否可用无参数的 $\widehat{\operatorname{rtu}}$ 或 $\widehat{\operatorname{unv}}$ 表示？

§5 初基函数集

由零級而一級，而二級、三級初等函数集，这是朝着逐步扩大的方向来进行討論的．如果再扩大下去，便将得出原始递归函数集、一般递归函数集、乃至半递归函数集等等．現在朝縮小的方向来討論．

当然，有一种縮小办法是討論五則函数(这在上面已經討論过

了). 五則函数集当然是一个非常重要的函数集,但从下面的两点考慮看来,它还是不够滿意的.

首先,在五則函数集中,加法属于一級初等函数集,乘法属于二級初等函数集,因此縮小的程度还不够彻底.

其次,五則函数集只对迭置封閉,对别的任何算子均不封閉,因此五則函数集只对命題联結詞封閉(因其中含有加法、乘法),但对量詞(甚至于对受限量詞)却不封閉,以致討論相应于五則函数的謂詞时会呈現出很大的不方便.

通常,数理邏輯工作者为了补救第二个缺点,都添入一些相应的算子,或竟添入量詞本身.但大多数人仍然用加法、乘法作开始函数,以致第一个缺点仍未除去.

这里引进一个新的函数集——初基函数集,既避免了上述两缺点,而它和一般(半)递归函数、半递归謂詞、算术謂詞等仍有很簡单的关系.

定义 从本原函数出发,經过迭置及初基算子 $\min_{x \to y} Nf(x)$ 所作成的函数叫做**初基函数**,如还以 $A_1, \cdots, A_h$ 为开始函数,则叫做**初基于 $A_1, \cdots, A_h$ 的函数**.初基于 $x \dot{-} y$、$\left[\frac{y}{x}\right]$ 的函数仍簡称为初基函数.以初基(于諸 A_i)函数为特征函数的謂詞叫做**初基(于諸 A_i 的)謂詞**.如"$y=f(x)$"为初基(于諸 A_i 的)謂詞,则 $f(x)$ 叫做**准初基(于諸 A_i)的函数**.

重要的初基函数有:

(1) $x \dot{-} y$, (2) $\left[\frac{y}{x}\right]$,

(3) $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$,

(4) $Nx = 1 \dot{-} x$, (5) $xNy = \left[\frac{x}{Ny}\right]$,

(6) $x \otimes y = \min(N^2x, N^2y)$,

(7) $x \oplus y = N \min(Nx, Ny) \quad (= \max(N^2x, N^2y))$,

(8) $\text{eq}(x, y)=(x \dot{-} y) \oplus (y \dot{-} x)$.

$\otimes$、$\oplus$ 两函数将称为**初基乘法**及**初基加法**.

在初基函数集中,可以作出下列初基算子:

(1) $\max\limits_{x\to y} Nf(x)=N \min\limits_{x\to y} N^2 f(x)$,

(2) $\prod\limits_{x\to y} Nf(x)=\min\limits_{x\to y} Nf(x)$.

看来,在初基函数集中的函数及算子是很少的,但是,初基謂詞的范圍却广泛得多. 以后还可証明,与"$\exists x$"或与"$\exists x$、$\forall x$"配合之后,初基函数集可以起一般递归函数集(乃至半递归函数集)的作用. 即使不和不受限量詞配合,初基謂詞基本上仍包括了一切日常使用的各种謂詞,这便是初基函数集所以那么重要的原因.

下面对初基函数集及初基謂詞作进一步研究.

定理 1 初基函数集对命題联結詞及受限量詞是封閉的.

証明 因为:

$$\text{ct}(A \vee B)=\text{ct}\, A \otimes \text{ct}\, B,$$

$$\text{ct}(\overline{A})=N\, \text{ct}\, A,$$

$$\underset{x\to n}{\forall} A(x)=\max_{x\to n} N^2\, \text{ct}\, A(x),$$

$$\underset{x\to n}{\exists} A(x)=\min_{x\to n} N^2\, \text{ct}\, A(x).$$

故定理得証.

注意:初基函数集显为各級(包括零級)初等函数集的子集,各級初等函数集当然也有这种特性.

定理 2 一謂詞为初基謂詞,当且仅当它可表成 $A=B$,而 A、B 为受界于初基函数的准初基函数.

定理 3 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为准初基函数(亦即 $y=f(x_1, \cdots, x_n)$ 为初基謂詞)当且仅当 $\text{eq}(y, f(x_1, \cdots, x_n))$ 为初基函数,从而 $N^2 f(x_1, \cdots, x_n)$ 及 $\max\limits_{x_i\to y} N^2 f(x_1, \cdots, x_n)$ 都是初基函数.

定理 4 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为准初基函数,当且仅当 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 可表成 $\text{rti}_y\, h(x_1, \cdots, x_n, y)$ 的形状,其中 h 为初基函数.

証明 必要性. 如 $f(x_i)$ 为准初基函数，则 $\mathrm{eq}(y, f(x_i))$ 为初基函数，而 $f(x_i)=\underset{y}{\mathrm{rti}}\ \mathrm{eq}(y, f(x_i))$.

充分性. 如果 $f(x_i)=\underset{y}{\mathrm{rti}}\ h(x_i, y)$，而 h 为初基函数，则：

$$z=f(x_i) \text{ 当且仅当 } h(x_i, z)=0 \wedge \underset{t\to z}{\forall} (t=z \vee h(x_i, t)\neq 0).$$

根据初基函数集对命題联結詞及受限量詞的封閉性，可知这是一个初基謂詞，从而定理得証.

注意：准初基函数集对迭置并不封閉. 换言之，即使 $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 为初基謂詞，但 $y=f(g(x))$ 未必是初基謂詞. 因此下述的定理 5 便呈現出其重要性了.

定义 如 $f(x_1, \cdots, x_n)\geqslant x_i (1\leqslant i\leqslant n)$，则 f 称为**前进函数**.

定理 5 如果 $y=f(x_1, \cdots, x_n)$, $y=g_i(x_1, \cdots, x_r)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为初基謂詞，此外，或者 f 为前进函数，或者各 g_i 均受界于初基函数，则 $y=f(g_1, \cdots, g_n)(x_1, \cdots, x_r)$ 亦为初基謂詞. 换句話說：

定理 5′ 如果 $f, g_1, \cdots, g_n$ 均为准初基函数，此外，或 f 是前进的，或諸 g_i 受界于初基函数，则 $f(g_1, \cdots, g_n)$ 亦为准初基函数.

証明 如果諸 g_i 受界，可設 $g_i\leqslant A_i$ (A_i 为初基)，则有

$y=f(g_1, \cdots, g_n)(x_i)$ 当且仅当

$$\underset{u_1\to A_1}{\exists}\cdots\underset{u_n\to A_n}{\exists}(y=f(u_1, \cdots, u_n)\wedge u_1=g_1(x_i)\wedge\cdots\wedge u_n=g_n(x_i)).$$

如果 f 为前进函数，则只須把諸 "A_i" 换为 "y" 卽可.

本定理还可推广为：

定理 6 如果由 $y=f(g_1, \cdots, g_n)(x_i)$ 可以推出：有初基函数 $h_i(x_1,\cdots,x_r,y)$，使得 $g_i(x_1,\cdots,x_r)\leqslant h_i(x_1,\cdots,x_r, y)$，则 $y=f(g_1, \cdots,g_n)(x_1, \cdots, x_r)$ 为初基謂詞，而 $f(g_1, \cdots, g_n)$ 为准初基函数.

有了上列各定理后，便可以认出下列各謂詞都是初基謂詞，并从中得出好些准初基函数. 这里并不对此詳細論証，只列出与它等价的关系式(讀者可自己詳細补足其証明).

(1) $y\leqslant z$, $y\dot{-}z=0$,

(2) $y<z$, $Sy\dot{-}z=0$,

(3) $y=x+z$, $(x\dot{-}y)\oplus(z\dot{-}y)\oplus\mathrm{eq}\,(y\dot{-}x,\ z)=0$,

(4) $y=x\cdot z$, $(y=0\wedge(x=0\vee z=0))\vee\left(\left[\frac{y}{x}\right]=z\wedge\left[\frac{y\dot{-}1}{x}\right]\right.$

$$\left.=z\dot{-}1\wedge y\neq 0\wedge x\neq 0\wedge z\neq 0\right),$$

(5) y 为 x 的倍数, $\underset{u\to y}{\exists}(y=u\cdot x)$,

(6) $y=\mathrm{rs}(x,\ z)$, $(y=x\wedge z=0)\vee(y<z\wedge x\dot{-}y$ 为 z 的倍数$)$,

(7) $y=[\sqrt{x}]$, $(x=0\wedge y=0)\vee\left(y\leqslant\left[\frac{x}{y}\right]\wedge y\right.$

$$\left.\geqslant\left[\frac{x\dot{-}y\dot{-}y}{y}\right]\right),$$

(8) y 为平方数, $\underset{x\to y}{\exists}(y=x\cdot x)$,

(9) $y=Ex$, $\underset{u\to x}{\exists}\ \underset{v\to x}{\exists}(x=u+y\wedge u=v^2\wedge y\dot{-}v\leqslant v)$,

(10) $y=Lx$, $\underset{u\to x}{\exists}\ \underset{v\to x}{\exists}(u=[\sqrt{x}]\wedge v=Ex\wedge y=u\dot{-}v)$,

(11) $y=\mathrm{tm}\,(i,\ w)$, 这里指

$$y=\mathrm{rs}(Ew,\ 1+S(ELw\dot{-}(ELw\dot{-}i))\cdot[DL^2w/SELw]+1).$$

容易驗証(見第一章§4习題第4題), 这样的 tm 可作求項函数,今后凡提到准初基的 tm 时即指此.

$$\underset{u_1\to w}{\exists}\ \underset{u_2\to w}{\exists}\ \underset{u_3\to w}{\exists}\ \underset{u_4\to w}{\exists}\ y=\mathrm{rs}(u_1,\ u_2)\wedge u_1=Ew\wedge u_2\dot{-}1=u_3\cdot u_4$$
$$\wedge u_3=S(ELw\dot{-}(ELw\dot{-}i))\wedge u_4=[DL^2w/SELw].$$

此外当然还有許多,这里不再一一列举.

如果添入一些开始函数而討論初基于諸 A_i 的函数,那末还可証:

(1) 如果 $A(x)+B(x)\leqslant C(x)$, 則 $A(x)+B(x)$ 为初基于 A、B、C 的函数,因

$$A(x)+B(x)=C(x)\dot{-}(C(x)\dot{-}A(x)\dot{-}B(x)).$$

(2) $y=\underset{x\to n}{\mathrm{seq}}\,f(x)$ 为初基于 $f(x)$ 的謂詞(亦即 $\underset{x\to n}{\mathrm{seq}}\,f(x)$ 为准初基于 $f(x)$ 的函数),因它可表为:

$$\forall_{x\to n}\{f(x)=\mathrm{tm}(x,\ y)\wedge\forall_{t\to y}(t=y\vee\exists_{x\to n}f(x)\neq\mathrm{tm}(x,\ t))\}.$$

准初基函数的概念还可推广如下.

定义 如 $y=f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 的特征函数为 Δ 集的函数,则 f 叫做**准 Δ 集函数**.

定理 7 (Skolen) 設 Δ 集包含初基函数集且对初基算子封閉,则对一般的函数 $f(x_1,\ \cdots,\ x_r)$ 說来,下列三条件彼此等价:

I. 有前进的准 Δ 集函数 A 及适当的 Δ 集函数 B, 使得

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_r)=A\,\mathrm{rti}_y\,B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y).$$

II. 关系式"$f(x_1,\ \cdots,\ x_r)=t$"是一个 Δ 集关系, 即其特征函数为 Δ 集函数.

III. 有适当的 Δ 集函数 $B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)$, 使得

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_r)=\mathrm{rti}_y\,B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y).$$

証明 I⊃II. 如 f 可表成 A 起首的形状,而 A 为前进函数;但"$f(x_1,\ \cdots,\ x_r)=t$"表示"$A\,\mathrm{rti}_y\,B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)=t$", 故必 $\mathrm{rti}_y\,B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)\leqslant t$, 从而

$$\mathrm{rti}_y\,B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)=\mathrm{rti}_{y\to t}\,B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y),$$

故关系式 $f(x_1,\ \cdots,\ x_r)=t$ 等价于下列的 Δ 集关系:

$$A\,\mathrm{rti}_{y\to t}\,B(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)=t.$$

II⊃III. 設 $f(x_1,\ \cdots,\ x_r)=t$ 的特征函数 $g(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ t)$ 属于 Δ, 则

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_r)=I\,\mathrm{rti}_t\,g(x_1,\ \cdots,\ x_r,\ t),$$

故满足 III 的要求.

III⊃I. 因 Ix 为前进函数, 故满足 I. 于是定理得証.

习　题

1. 将关系式 $y=\mathrm{rti}_{x\to n}\,f(x)$ 的特征函数表成初基于 $f(x)$ 的函数.

2. 問下列各語句中，哪些語句的特征函数是初基于 $f(x)$ 的？哪些則否？

(1) $y=\min\limits_{x\to n} f(x)$, $y=\max\limits_{x\to n} f(x)$;

(2) $y=\sum\limits_{x\to n} f(x)$, $y=\prod\limits_{x\to n} f(x)$;

(3) $y=\operatorname{rta}\limits_{x\to n} f(x)$, $y=\widehat{\operatorname{inv}}\limits_{x\to(u,n)} f(x)$;

(4) $y=\operatorname{itr}\limits_{x\to(u,m,n)} f(x)$, $y=\operatorname{rec}\limits_{(x,y)\to(u,m,n)} f(x,y)$.

3. 設 $f(u,x)\leqslant A(u,x)$, $B(u,x,y)=N^2(f(u,x)\dot{-}y)$, 求証 $f(u,x)$ 为受限摹状于 A、B 的函数.

(由 f 造 B 只用迭置，由 B 造 f 須用受限摹状算子. 这便表明：f 比 B 要复杂些.)

4. 試用尽量簡单的方式，由下列算子来定义 $\min\limits_{x\to n} N$ 及 $\max\limits_{x\to n} N$ (使用尽量低級的初等函数)：

(1) $\prod\limits_{x\to n}$; (2) $\sum\limits_{x\to n}$; (3) $\operatorname{rti}\limits_{x\to n}$; (4) $\operatorname{rta}\limits_{x\to n}$;

(5) $\widehat{\operatorname{itr}}\limits_{x\to(u,m,n)}$; (6) $\widehat{\operatorname{rec}}\limits_{(x,y)\to(u,m,n)}$; (7) $\widetilde{\operatorname{rti}}\limits_{x\to n}$; (8) $\widetilde{\operatorname{rta}}\limits_{x\to n}$.

(后两算子的定义見上节习题第 2 題.)

5. 在已研究过的各初等算子中，有哪些算子是利用初基函数后便可以彼此互相表示的？

6. 受界于初基函数的准初基函数集恰巧与零級副初等于 $x\dot{-}y$、$\left[\frac{y}{x}\right]$ 的函数集一致，又必为零級初等函数集的眞子集.

7. 初基謂詞集恰巧是零級副初等于 $x\dot{-}y$、$\left[\frac{y}{x}\right]$ 的謂詞集，又必为零級初等謂詞集的眞子集.

第四章　原始递归函数

§1　与初等函数的关系

定义　由本原函数出发，經过有限次迭置与原始递归式所作成的函数，叫做**原始递归函数**．如果再加入 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 作为开始函数，則所得的叫做**原始递归于 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 的函数**．

依照定义，在作成原始递归函数的过程中，只允許使用本原函数而不允許使用新开始函数（甚至于加法和乘法亦不能作为开始函数），这是与初等函数集（零級以外的）之不同点．尽管如此，仍有下列定理：

定理 1　原始递归函数集包含各級初等函数集为其眞子集．

証明　試就各級初等函数的定义来討論．

本原函数是在原始递归函数集之内的．至于开始函数（加法、乘法及 2^x、$\varphi_n(u, x)$ 等），則可如下定义（下面只作到 2^x，余仿此）：

$$u+x:\ \begin{cases} u+0=u, \\ u+Sx=S(u+x), \end{cases}$$

即
$$u+x=\operatorname*{rec}_{(x,y)\to(u,x)} Sy.$$

$$u\cdot x:\ \begin{cases} u\cdot 0=0, \\ u\cdot Sx=u\cdot x+u, \end{cases}$$

即
$$u\cdot x=\operatorname*{rec}_{(x,y)\to(0,x)} (y+u).$$

$$2^x:\ \begin{cases} 2^0=1, \\ 2^{Sx}=2^x\cdot 2, \end{cases}$$

即
$$2^x=\operatorname*{rec}_{(x,y)\to(1,x)} 2y.$$

对于算子，迭置是原始递归的，而受限原始递归式只須借助于

函数 min 便极易由(不受限的)原始递归式表出. 今先作函数 min:

$$Dx:\begin{cases}D_0=0,\\ DSx=x.\end{cases}\quad 即\ Dx=\underset{(x,y)\to(0,x)}{\mathrm{rec}}\ x.$$

$$u\dot{-}x:\begin{cases}u\dot{-}0=u,\\ u\dot{-}Sx=D(u\dot{-}x).\end{cases}\quad 即\ u\dot{-}x=\underset{(x,y)\to(u,x)}{\mathrm{rec}}\ Dy.$$

$$\min(x,\ y)=x\dot{-}(x\dot{-}y).$$

于是便得:

$$\underset{(x,y)\to(u,m,n)}{\widehat{\mathrm{rec}}}\ f(t,\ x,\ y)=\underset{(x,y)\to(m,n)}{\mathrm{rec}}\ f(t,\min(u,x),\min(u,y)).$$

故各級初等函数都是原始递归函数.

(讀者还可从 Kalmar 所作的初等函数集的定义而証明本断語.)

第三章§3中曾証明, 由 2^x 及原始复迭式可以作出一个不是三級初等函数的 $\underset{y\to(a,h)}{\mathrm{itr}}\ 2^y$. 一般, $\varphi_{n+1}(u,\ x)$ 不在 n 級初等函数集中,而該函数显然为原始递归函数. 可見,各 n 級初等函数集的确是原始递归函数集的眞子集. 定理得証.

习 题

1. 試用原始递归式直接定义下列算子:

$$\underset{x\to n}{\widetilde{\mathrm{rti}}}、\underset{x\to n}{\mathrm{rta}}、\underset{x\to n}{\widetilde{\mathrm{rta}}}、\underset{x\to n}{\max}、\underset{x\to n}{\min}、\sum_{x\to n}、\prod_{x\to n}.$$

(这里的 $\underset{x\to n}{\widetilde{\mathrm{rti}}}$ 及 $\underset{x\to n}{\widetilde{\mathrm{rta}}}$ 的意义为: 当作用域在 n 以下有零点时, 则分别指其最小及最大零点,否则指一个預先給定的函数 $a(n)$. 讀者試与第三章§4习题的第2題作比較.)

2. 写出下列递归式的通常表示式,并求它所定义的函数之显式:

(1) $\underset{(x,y)\to(u,n)}{\mathrm{rec}}\ (y+f(x))$;

(2) $\underset{(x,y)\to(u,n)}{\mathrm{rec}}\ (y\cdot f(x))$;

(3) $\underset{(x,y)\to(u,n)}{\mathrm{rec}}\ (y\cdot f(x)+g(x))$.

3．要求同上题：

(1) $\underset{(x,y)\to(u,n)}{\text{rec}}(y+2N\text{rs}([\sqrt{x}],2)\dot{-}1)$，又，将 N 换为 N^2；

(2) $\underset{(x,y)\to(u,n)}{\text{rec}}[y+N((y+1)^2\dot{-}(x+1))]$，又，将 N 换为 N^2.

4．試証：

$$\underset{(x,y)\to(u+a,n)}{\text{rec}}[f(x)\cdot y+g(x)+a]=a+\underset{(x,y)\to(n,u)}{\text{rec}}(f(x)\cdot(y+a)+g(x)).$$

5．試証：如果 $f(a,y)=af(y)$，則 $\underset{y\to(a,x)}{\text{itr}}f(y)=a\cdot\underset{y\to(k,x)}{\text{itr}}f(y)$.

§2　原始递归式的化归

在討論初等函数时，所使用的各种算子，可以說都是原始递归算子的特例．我們看到，即使同时运用这么多的算子，仍然作不出原始递归函数集来．因此，为了作出全部原始递归函数，原始递归式是必不可少的．但是，能不能把原始递归式稍为削弱一些，使得它与迭置配合起来后仍然可以作出所有的原始递归函数呢？我們看到过于减弱是不成的（例如，减弱到变成了初等算子），但适当减弱还是可以的．

对原始递归式，在一般书上均用下式作代表：

$$\begin{cases}f(u_1,\cdots,u_r,0)=A(u_1,\cdots,u_r),\\ f(u_1,\cdots,u_r,x+1)=B(u_1,\cdots,u_r,x,f(u_1,\cdots,u_r,x)),\end{cases}$$

但依照上面的討論，它可化归为下列的递归式：

$$\underset{(x,y)\to(u,n)}{\text{rec}}B(u_1,\cdots,u_r,x,y),$$

即 $$\begin{cases}g(u_1,\cdots,u_r,u,0)=u,\\ g(u_1,\cdots,u_r,u,Sx)=B(u_1,\cdots,u_r,x,g(u_1,\cdots,u_r,u,x)).\end{cases}$$

这递归式有种种特例．例如，不容許参数的原始递归式

$$\underset{(x,y)\to(u,v)}{\text{rec}}B(x,y),$$

定义出如下函数：

$$\begin{cases}f(u,0)=u,\\ f(u,x+1)=B(x,f(u,x)),\end{cases}$$

这称为**无参数的原始递归式**. 如果 B 与 x 无关, 則得出**强原始复迭式** $\underset{y\to(u,x)}{\mathrm{itr}} B(y)$, 当不容許参数时它定义下列函数:

$$\begin{cases} f(u,\ 0)=u, \\ f(u,\ x+1)=B(f(u,\ x)). \end{cases}$$

还可限定初值变元为固定的常数 a (例如 $a=0$) 得 $\underset{y\to(0,x)}{\mathrm{itr}} B(y)$, 这叫做**弱原始复迭式**, 当不容許参数时它定义如下函数:

$$\begin{cases} f(0)=0, \\ f(x+1)=B(f(x)). \end{cases}$$

显然, 无参数的弱原始复迭式为以上各式之特例. 的确, 在所列的三个递归式中, 易見后面的递归式都是前面的递归式的特例. 这几种算子都不是初等算子, 今証它們(即使是无参数的)与(容許参数的)原始递归式等价, 即皆可互相表示.

定理 1 引进任意一組配对函数后, (容許参数的)原始递归式可用不容許参数的强复迭式表示.

証明 設引入的配对函数为 pg、K、L. 又設由下列原始递归式而定义 f:

$$\begin{cases} f(u_1,\cdots,\ u_r,\ 0)=A(u_1,\cdots,\ u_r), \\ f(u_1,\cdots,\ u_r,\ x+1)=B(u_1,\ \cdots,u_r,x,\ f(u_1,\cdots,u_r,x)). \end{cases}$$

今用(不容許参数)强复迭式定义一函数 g 如下:

$$\begin{cases} g(u,\ 0)=u, \\ g(u,\ Sx)=pg^{r+2}0\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r(S\alpha)B(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha,Lg(u,x)), \end{cases}$$

其中

$$\alpha_i=LK^{r+2-i}g(u,\ x) \quad (1\leqslant i\leqslant r),$$

$$\alpha=LKg(u,\ x).$$

今証 f 可由 g 作迭置而得. 具体說来, 如命

$$\tilde{u}\ 表\ pg^{r+2}0u_1\cdots u_r0A(u_1,\ \cdots,\ u_r),$$

則有

$$f(u_1,\cdots,\ u_r,\ x)=Lg(\tilde{u},\ x).$$

为了証明这断語,先知道

$$LKg(\tilde{u}, Sx) = SLKg(\tilde{u}, x),$$

$$LK^{r+2-i}g(u, Sx) = LK^{r+2-i}g(u, x) \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

故得(以 $\tilde{a}$、$\tilde{a}_i$ 表相应于 $\tilde{u}$ 的 a 及 a_i):

$$\tilde{a} = LKg(\tilde{u}, x) = LKg(\tilde{u}, 0) + x = LK\tilde{u} + x = 0 + x = x;$$

$$\tilde{a}_i = LK^{r+2-i}g(\tilde{u}, x) = LK^{r+2-i}g(\tilde{u}, 0) = LK^{r+2-i}\tilde{u} = u_i.$$

明白这两点后,即可用数学归納法来証明本断語.

奠基:

$$Lg(\tilde{u}, 0) = L\tilde{u} = A(u_1, \cdots, u_r) = f(u_1, \cdots, u_r, 0),$$

故当 $x=0$ 时本断語成立.

归納:

$$\begin{aligned} Lg(\tilde{u}, Sx) &= Lpg^{r+2}0\tilde{a}_1 \cdots \tilde{a}_r(S\tilde{a})B(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_r, \tilde{a}, Lg(\tilde{u}, x)) \\ &= B(u_1, \cdots, u_r, x, Lg(\tilde{u}, x)) \\ &= B(u_1, \cdots, u_r, x, f(u_1, \cdots, u_r, x)) \quad (\text{归納假設}) \\ &= f(u_1, \cdots, u_r, Sx). \end{aligned}$$

故依数学归納法,本断語得証.

于是,这就証明了可用无参数的强复迭式来定义 g. 既得 g, 即可用迭置而得 f. 从而定理得証.

定理 2 有了 $x+y$、xNy 及从 0 起的具平梯性质的配对函数之后,容許参数的原始递归式可用无参数的弱复迭式表示.

証明 既有配对函数,任何原始递归式可用无参数的强复迭式及迭置来代替. 設用无参数的强复迭式定义 g 如下:

$$\begin{cases} g(u, 0) = u, \\ g(u, x+1) = Bg(u, x). \end{cases}$$

今試討論函数 $h(u) = pg(u, g(Lu, Ku))$, $h(u)$ 应具下列性质:

$$h(0) = pg(0, g(L0, K0)) = pg(0, g(0, 0)) = pg(0, 0) = 0,$$

$$h(u+1) = pg(u+1, g(L(u+1), K(u+1))).$$

对此,可分两情形討論:

第一, 当 $K(u+1)=0$ 时,有

$$h(u+1)=pg(u+1,\ g(L(u+1),\ 0))$$
$$=pg(u+1,\ L(u+1))$$

(暫記最后一式为 $B_1(u)$),

第二, 当 $K(u+1)\neq 0$ 时,有

$$h(u+1)=pg(u+1,\ g(Lu,\ Ku+1))$$
$$=pg(u+1,\ Bg(Lu,\ Ku))$$
$$=pg(u+1,\ BLh(u))$$

(暫記最后一式为 $B_2(u,\ h(u))$),

故得

$$h(u+1)=B_1(u)NK(u+1)+B_2(u,\ h(u))N^2K(u+1)$$
$$=B_3(u,\ h(u)).$$

如注意到 $u=Kh(u)$, 則还可写成

$$h(u+1)=B_3(Kh(u),\ h(u))=B_4(h(u)).$$

故 $h(u)$ 可以直接用无参数的弱复迭式如下定义:

$$\begin{cases} h(0)=0, \\ h(u+1)=B_4(h(u)). \end{cases}$$

注意:只用 $x+y$、xNy、配对函数及迭置,便可把 B_4 作成. 故有了这些函数及迭置后, $h(u)$ 是可用弱复迭式而定义的. $h(u)$既可直接用弱复迭式定义,我們便可从 $h(u)$ 而定义 g 及 f 如下:

$$f(u_1,\cdots,u_r,u,x)=Lg(\tilde{u},x)=LLhpg(\tilde{u},x) \quad (\tilde{u}\text{ 見前})$$

这样一来, 任意一个容許参数的原始递归式均可用无参数的弱复迭式表示了. 定理得証.

对这两条定理,还可作更进一步的改进,使得用它們表示原始递归式时所須借助的函数减到最少.

定理 3 只用本原函数, 迭置及无参数递归式, 便可作出一切原始递归函数. 换言之, 在原始递归函数的定义中, 可把"原始递

归式"字样换为"无参数原始递归式".

証明 因为无参数的强原始复迭式为无参数原始递归式的特例,故根据定理1,只須証明:由本原函数出发,利用迭置及无参数原始递归式可以作出配对函数.

下面就是造配对函数的定义过程:

(1) $u+x$: $\begin{cases} u+0=u, \\ u+(x+1)=(u+x)+1=S(u+x); \end{cases}$

(2) Dx: $\begin{cases} D0=0, \\ D(x+1)=x; \end{cases}$

(3) $u \dot{-} x$: $\begin{cases} u \dot{-} 0=u, \\ u \dot{-} (x+1)=(u \dot{-} x) \dot{-} 1; \end{cases}$

(4) x^2: $\begin{cases} 0^2=0, \\ (x+1)^2=x^2+x+x+1; \end{cases}$

(5) $[\sqrt{x}]$: $\begin{cases} [\sqrt{0}]=0, \\ [\sqrt{x+1}]=[\sqrt{x}]+(1 \dot{-} ((1+[\sqrt{x}])^2 \\ \qquad \dot{-} Sx)); \end{cases}$

由此即得:

$$pg(x, y)=(x+y)^2+x,$$
$$Kx=x \dot{-} [\sqrt{x}]^2,$$
$$Lx=[\sqrt{x}] \dot{-} Kx.$$

定理于此得証.

注意:在上述求作过程中,无参数原始递归式只用来定义三个函数,即 Dx、T_1x 及 R_1x,因此,如果把这三个函数作为开始函数,便可从头到尾只使用无参数的强原始复迭式了.还可作如下改进.即可証:只須增加一个开始函数,便可以从头到尾用无参数的强原始复迭式来代替原始递归式了,如增加两个开始函数,則使用无参数的弱原始复迭式也够了.为此,先証一引理.

引理 由加法及函数

(1) NE_ax, (2) N^2E_ax,

(3) NL_ax, (4) N^2L_ax,

(5) $N\overline{L}_ax$, (6) $N^2\overline{L}_ax$

之一,利用迭置即可作出 NE_aSx 及 Nx.

証明 先指出(1)~(2)、(3)~(4)、(5)~(6)之間可互相定义:

$$N^2E_ax=NE_a(NE_ax+1),$$
$$NE_ax=N^2E_a(N^2E_ax+a+2);$$
$$N^2L_ax=NL_a(NL_ax),$$
$$NL_ax=N^2L_a(N^2L_ax+1);$$
$$N^2\overline{L}_ax=N\overline{L}_a(N\overline{L}_ax),$$
$$N\overline{L}_ax=N^2\overline{L}_a(N^2\overline{L}_ax+1).$$

要定义 NE_aSx, 对(1)、(2)两組, 只須与 Sx 作迭置即得, 对别的两組則如下作出:

$$NE_aSx=NL_a(Sa+N^2L_ax+NL_aSx),$$
$$NE_aSx=N\overline{L}_a(Sa+N^2\overline{L}_ax+N\overline{L}_aSx).$$

有了 NE_aSx 后,可定义 Nx 如下:

$$Nx=NE_aS(NE_aSx+NE_aS(x+a+1)+3a).$$

引理得証.

定理4 如果加入六个函数

(1) NE_ax, (2) N^2E_ax,

(3) NL_ax, (4) N^2L_ax,

(5) $N\overline{L}_ax$, (6) $N^2\overline{L}_ax$

中的一个作为开始函数,則由本原函数出发,利用迭置及无参数的强复迭式,即可定义出一切原始递归函数.

証明 配对函数的作成过程如下:

① $u+x$:

$$\begin{cases}u+0=u,\\u+Sx=S(u+x);\end{cases}$$

② uNx:

$$\begin{cases} uN0=u, \\ uNSx=0; \end{cases}$$

③ NE_aSx （按引理作出）;

④ G_ax （暂用，实质上它是 $x+Sa\cdot R_ax$）:

$$\begin{cases} G_a0=0, \\ G_aSx=SG_ax+Sa\cdot NE_aS(G_a(x)+a+2); \end{cases}$$

⑤ T_ax:

$$\begin{cases} T_a0=0, \\ T_aSx=G_aT_ax+1; \end{cases}$$

⑥ $\mathrm{rs}(x,\ 2)$:

$$\begin{cases} \mathrm{rs}(0,\ 2)=0, \\ \mathrm{rs}(Sx,\ 2)=N\mathrm{rs}(x,\ 2); \end{cases}$$

⑦ $F(u,\ x)$（暂用）:

$$\begin{cases} F(u,\ 0)=u, \\ F(u,\ Sx)=(F(u,\ x)+2)\cdot N(NE_aSF(u,\ x) \\ \qquad\qquad \cdot N\mathrm{rs}(SF(u,\ x),\ 2)); \end{cases}$$

⑧ Du（注意：$(16a+15)\cdot a$ 可用加法表出）:

$$Du=N^2u\cdot(N^2\mathrm{rs}(u,\ 2)+F(T_a4u+(16a+15)\cdot u +\mathrm{rs}(u,\ 2),\ u));$$

⑨ $u\dot{-}x$:

$$\begin{cases} u\dot{-}0=u, \\ u\dot{-}Sx=D(u\dot{-}x); \end{cases}$$

⑩ $\mathrm{eq}(x,\ y)$:

$$\mathrm{eq}(x,\ y)=N^2((u\dot{-}x)+(x\dot{-}u));$$

⑪ $\mathrm{rs}(x,\ c)$ （c 为固定数，下同）:

$$\begin{cases} \mathrm{rs}(0,\ c)=0, \\ \mathrm{rs}(Sx,\ c)=S\mathrm{rs}(x,\ c)N^2\mathrm{eq}(\mathrm{rs}(x,\ c),\ c\dot{-}1); \end{cases}$$

⑫ $H_c x$:

$$\begin{cases} H_c 0 = 0, \\ H_c Sx = SH_c x + N\mathrm{rs}(Hx+2,\ c+1); \end{cases}$$

⑬ $\left[\frac{x}{c}\right]$:

$$\left[\frac{x}{c}\right] = H_c x \dot{-} x;$$

⑭ $R_a x$:

$$R_a x = \left[\frac{G_a x \dot{-} x}{Sa}\right];$$

⑮ $pg_a(x,\ y)$:

$$pg_a(x,\ y) = T_a(x+y) + x;$$

⑯ $K_a x$:

$$K_a x = x \dot{-} T_a R_a x;$$

⑰ $L_a x$:

$$L_a x = R_a x \dot{-} K_a x.$$

定理 5 如加入下列九組开始函数之一:

(甲 1) $x+y,\ E_a x$; (甲 2) $x+y,\ L_a x$;

(甲 3) $x+y,\ \overline{L}_a x$;

(乙 1) $x \dot{-} y,\ NE_a x$; (乙 2) $x \dot{-} y,\ N^2 E_a x$;

(乙 3) $x \dot{-} y,\ NL_a x$; (乙 4) $x \dot{-} y,\ N^2 L_a x$;

(乙 5) $x \dot{-} y,\ N\overline{L}_a x$; (乙 6) $x \dot{-} y,\ N^2 \overline{L}_a x$,

则由本原函数出发，利用迭置及无参数的弱复迭式即可定义出一切原始递归函数.

証明 利用定理 2，只須証明加入上列九組新开始函数之一后，可以由迭置及无参数的弱复迭式定义出 $x+y$、xNy 及具平梯性的配对函数組便成了，其作成过程如下:

① $x+y$，对甲組說来，这是开始函数. 对乙組說来，可如下作出:

i $2x=\underset{y\to(0,x)}{\text{itr}}\ SSy$,

ii $2^x-1=\underset{y\to(0,x)}{\text{itr}}\ S(2y)$,

iii $2^x=S(2^x-1)$,

iv $x+y=A\dot{-}((A\dot{-}x)\dot{-}y)$,

这里 A 为 $2^{2\cdot 2x}\dot{-}2^{2\cdot 2y+1}$, 注意: $A\geqslant x+y$;

② NE_aSx;

③ Nx;

(这两函数可按引理作出.)

④ G_ax;

⑤ T_ax, 仿定理 4 作出;

⑥ $x-y$, 对乙組說来,可用 $x\dot{-}y$, 对甲組說来,可如下作出:

(甲 1): $x-y=E_a(T_a(x+y)+(a+2)x+ax+1)$

(甲 2): $\quad\quad=L_a(T_a(2x+y)+(x+2y))$

(甲 3): $\quad\quad=\overline{L}_a(T_a(2x+y)+Sa\cdot(x+2y))$;

⑦ $\text{eq}(x, y)=N^2((x-y)+(y-x))$;

⑧ $\text{rs}(x, c)$ (c 为一个固定数,下同);

⑨ H_cx;

⑩ $\left[\dfrac{x}{c}\right]$;

⑪ R_ax;

(均仿定理 4, 但"$x\dot{-}y$"須改为"$x-y$".)

⑫ $x\cdot y=\left[\dfrac{T_a(x+y)-T_ax-T_ay}{Sa}\right]$;

⑬ xNy, 由③、⑫迭置;

⑭ $\widetilde{pg}_a(x, y)=T_a(T_a(x+y)+y)+x$;

⑮ $K_ax=x\dot{-}T_aR_ax$;

⑯ $\widetilde{L}_ax=K_aR_ax$.

因⑭~⑯为具平梯性的配对函数組,故定理得証.

R. Robinson 曾証明：只加入 $x+y$ 及 NEx 是不能够純用无参数的弱复迭式而作出一切原始递归函数来的.

把原始递归式化归为无参数弱原始复迭式，可以說已化至最簡了，很难想象，还有具有同样力量的更簡的递归式了；同时，也很难找出更弱的高等能行算子了.

习　题

1. 把下列原始复迭式的通常式子写出，并写出所定义的函数之显式，其中有 E_a 的均可改为 L_a、$\overline{L}_a$、$\widetilde{L}_a$ 而得三組新习題：

(1) $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\mathrm{rec}}\ (y+\mathrm{rs}(y,\ a))$,

(1)′ $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\mathrm{rec}}\ (y+S\ \mathrm{rs}(y,\ a))$;

(2) $\underset{(x,y)\to(n,u)}{\mathrm{rec}}\ [1+y+N^i(T_a y \dot{-} v)]\quad (i=0,\ 1,\ 2)$;

(3) $\underset{(x,y)\to(n,u)}{\mathrm{rec}}\ [(y+2)\cdot N^i(N^j E_a y\cdot N^k \mathrm{rs}(y,2))]\quad$ (i,j,k 均限于 $0,1,2$);

(4) $\underset{(x,y)\to(n,u)}{\mathrm{rec}}\ [y+E_a y+a+2]$,

(4)′ $\underset{(x,y)\to(n,v)}{\mathrm{rec}}\ [y+Sa\cdot E_a y+2]$,

(4)″ $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\mathrm{rec}}\ (y+Sa\cdot E_{a\cdot b}y+b+1)$,

(4)‴ $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\mathrm{rec}}\left(y+Sa\cdot\left[\frac{E_a y}{b}\right]+b+1\right)$;

(5) $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\mathrm{rec}}\ [y+1+N^i E_a(y+1)]\quad (i=0,\ 1,\ 2)$;

(6) $\underset{(x,y)\to(n,u)}{\mathrm{rec}}\ [E_a(y+1)\dot{-}N^i E_a y]\quad (i=0,\ 1,\ 2)$,

(6)′ $\underset{(x,y)\to(u,v)}{\mathrm{rec}}\ (E_a(y+1)+N^i E_a y)\quad (i=0,\ 1,\ 2)$.

2. 試用原始递归式定义下列各函数：

(1) $\mathrm{rs}(x,\ y)$;　　(2) $\left[\frac{x}{y}\right]$;

(3) $[\sqrt{x}]$;　　(4) Ex;

(5) $T_a x$;　　(6) 2^x （用复迭式）;

(7) a^x （用复迭式，a 为給定的数）;

(8) $R_a x$;　　(9) $K_a x$;

(10) $L_a x$;　　(11) $\overline{L}_a x$;

(12) $a(0)+(u\dot{-}a(1))+\cdots+(u\dot{-}a(n))$.

在递归式中只允許使用$+$、$\dot{-}$、$\cdot$及迭置，不允許使用别的函数及算子.

3．設任給一函数$f(x)$，求作(可借助于不受限摹状式)一函数$g(x)$，使得$g(x)$的值域与$f(x)$的值域全同，但$g(x)$对每个值只取一次($g(x)$可說是不重复地枚举了$f(x)$的值域).

4．試証：由$x+y$及$\overline{L}_a x$，利用无参数的弱复迭式及迭置来作原始递归函数时亦可如下作出：

(1) $x+y$;

(2) $T_a x=\underset{y\to(0,x)}{\mathrm{itr}}(y+Sa\cdot\overline{L}_a y+1)$;

(3) $x-y=\overline{L}_a(T_a(2x+y)+Sa\cdot(x+2y))$;

(4) Nx　(按引理);

(5) $R_a x=\overline{L}_a(x+Sa\cdot(\overline{L}_a x+1)+1)$;

(6) $x\dot{-}\left[\dfrac{x+a}{Sa}\right]=\overline{L}_a(T_a x+x)$;

(7) $\left[\dfrac{x}{Sa}\right]=x\dot{-}\left(x\dot{-}\left[\dfrac{x+a}{Sa}\right]\right)$　(当x可被Sa整除时);

(8) $x\cdot y=\left[\dfrac{T_a(x+y)-T_a x-T_a y}{Sa}\right]$;

(9) xNy，由(4)与(8)迭置；$\overline{pg}_a(x,y)$、$K_a x$、$\overline{L}_a x$同前.

5．当A为一元函数时，命A°表$pg(I,AL)$，再用α°表示相应于α的有$\circ$形算子．設

$$f(x)=\underset{t\to(0,x)}{\mathrm{itr}}\ B(t),$$

$$g(x)=\underset{t\to(0,x)}{\mathrm{itr}}\ pg(SK,N^2LSKB^\circ\cdot L)(t),$$

求証$f^\circ(x)=g(x)$．又，問在証明中需不需要pg从0編号起及K、L具平梯性?

6．由上題結果，試証：只借助于一元函数及(1,1)迭置，可用算子itr而表示itr°．因此，只須从适当的一元函数开始，即可只用itr及(1,1)迭置而作出一元原始递归函数集．試具体作出之(如根据一般的理論，只能用itr°而作出).

7．仿上題，試証：对于二級以上任一初等函数集Δ，其Δ_1可只用$\widehat{\mathrm{itr}}$及(1,1)迭置而作出(选取适当的一元开始函数)，試具体作出之．这結論能否推广到一級、零級初等函数集？能否推广到初基函数集?

§3 原始递归式的加强

現在再从相反的方向来研究. 这里要探討一下, 有沒有一些表面看来更强的、更复杂的递归式, 但是却可以用原始递归式(及迭置)来表示的呢? 回答是肯定的. 这些更强的更复杂的递归式用得非常多, 因此証明它們可以用原始递归式(及迭置)来表示是非常重要的.

永可假定参数只有一个. 因为設作用域 f 有 r 个参数 $f(u_1, \cdots, u_r, x)$, 我們可引入函数

$$f(LK^{r-1}u,\ LK^{r-2}u,\ \cdots,\ LKu,\ Lu,\ x),$$

記其为 $g(u, x)$, 我們有(u_0 可任意指定):

$$f(u_1,\ \cdots,\ u_r,\ x)=g(pg^r u_0 u_1\cdots u_r,\ x).$$

故作用域可改用 $g(v, x)$ (作用后再把 v 代以 $pg^r u_0 u_1\cdots u_r$), 但改用 g 时, 作用变元与原来一样 (皆为 x), 而参数却只有一个了. 足見, 上面的假定絕不丧失普遍性.

(一) 联立递归式

可以同时定义两个或多个函数 $f_i(u, x)$, 而在計算每一个 $f_i(u, x+1)$ 时, 都使用到各 f_i 的前行值.

三个函数的联立递归式可表示如下:

$$\begin{cases} f_1(u,\ 0)=A_1(u), \\ f_2(u,\ 0)=A_2(u), \\ f_3(u,\ 0)=A_3(u), \\ f_1(u,\ x+1)=B_1(u,\ x,\ f_1(u,\ x),\ f_2(u,\ x),\ f_3(u,\ x)), \\ f_2(u,\ x+1)=B_2(u,\ x,\ f_1(u,\ x),\ f_2(u,\ x),\ f_3(u,\ x)), \\ f_3(u,\ x+1)=B_3(u,\ x,\ f_1(u,\ x),\ f_2(u,\ x),\ f_3(u,\ x)). \end{cases}$$

多个函数的情形完全仿此.

欲把联立递归式化归为原始递归式, 可引入函数:

$$g(u,\ x)=pg^2 f_3(u,\ x) f_2(u,\ x) f_1(u,\ x),$$

因而有

$$f_1(u, x)=Lg(u, x),$$
$$f_2(u, x)=LKg(u, x),$$
$$f_3(u, x)=K^2g(u, x).$$

这时,显見 $g(u, x)$ 具下列性质:

$$\begin{aligned}g(u, 0)&=pg^2f_3(u, 0)f_2(u, 0)f_1(u, 0)\\&=pg^2A_3(u)A_2(u)A_1(u)\\&=A(u),\\g(u, Sx)&=pg^2B_3(u, x, Lg, LKg, K^2g)B_2(u, x, Lg,\\&\qquad LKg, K^2g)B_1(u, x, Lg, LKg, K^2g)\\&=B(u, x, g(u, x)).\end{aligned}$$

这即是 $g(u, x)$ 的原始递归式. 既得 $g(u, x)$, 即可定义 $f(u, x)$ 如下:

$$f_1(u, x)=Lg(u, x),$$
$$f_2(u, x)=LKg(u, x),$$
$$f_3(u, x)=K^2g(u, x).$$

对多个函数的联立递归式可仿此討論.

綜上所述,可知联立递归式可化归为原始递归式及迭置.

(二) **串値递归式**

不論定义一个函数或多个函数, 如果所使用的函数前行値不限于直接前驅 $f_1(u, x)$、$f_2(u, x)$ 等, 还使用更前的前行値 $f_i(u, x_i)(x_i\leqslant x)$,这便叫做**串値递归式**(多个函数时叫做**串値联立递归式**).

串値递归式可用下式作代表:

$$\begin{cases}f(u, 0)=A(u),\\f(u, x+1)=B(u, x, f(u, x_1), \cdots, f(u, x_p))\end{cases}$$
$$(x_i\leqslant x, i=1, \cdots, p).$$

今証它可化归为原始递归式及迭置.

我們知道,若命

$$g(u, x)=\prod_{i\to x} P_i^{f(u,i)},$$

則有 $\widetilde{B}$ 使得

$$B(u, x, f(u, x_1), \cdots, f(u, x_p))=\widetilde{B}(u, x, g(u, x)).$$

故 $g(u, x)$ 可用下列原始递归式表示:

$$\begin{cases} g(u, 0)=P_0^{f(u,0)}=2^{A(u)}, \\ g(u, x+1)=g(u, x)\cdot P_{x+1}^{f(u,x+1)} \\ \qquad\qquad\qquad =g(u, x)\cdot P_{x+1}^{\widetilde{B}(u, x, g(u,x))}. \end{cases}$$

旣定义了 g, 便可如下定义 f:

$$f(u, x)=\mathrm{ep}_x\, g(u, x).$$

串值联立递归式仿前討論(只須引用配对函数便成了).

在串值递归式中, x_i 可随 u、x 而更改,即可有 $x_i=x_i(u, x)$, 但 x_i 的个数 p 却是固定的, 不随 u、x 而更改(因为 B 的变元个数是固定的). 如果連 x_i 的个数 p 也随 u、x 而更改, 則所得递归式不是这里所定义的串值递归式,而是含有算子的递归式了. 对此,在下面将加以研究.

(三) **参数变异的递归式**

上面两种递归式(以及原始递归式)都有一个特点,即:在递归式中出現的 f 值,不管是待計算的或是在前的(已計算的),其中的参数都是一样的,都是"u". 在递归式中,所謂"在前的" f 值,本来只是指递归变元較小的 f 值来說的,一点也不管参数值的大小.换言之,不論 u_1、u_2 孰大孰小,永远认为 $f(u_1, x)$ 在 $f(u_2, x+1)$ 之前. 这样, 只要 x_1 及 x_2 的值較小于 $x+1$, 那末不管参数 u_1 及 u_2 的値怎样, $f(u_1, x_1)$、$f(u_2, x_2)$ 都可以出現在递归第二式的右边. 当 u_1、u_2 为 u、x 的已知函数时, 这种递归式便叫做**参数变异递归式**,它也有串值与否、联立与否之分.

設有串值参数变异的递归式如下(沒有嵌套时的最一般的情形):

$$\begin{cases} f(u,\ 0)=A(u), \\ f(u,\ Sx)=B(u,\ x,\ f(u_1,\ x_1),\cdots,f(u_p,\ x_p)), \end{cases}$$

而这里的各 u 及各 x 均为 u 及 x 的函数，但须 $x_i \leqslant x$，今先使用变元归一法（或变元增大法）作出初步化归如下：

命

$$w_x u = w(x,\ u) = \max_{z\to u} \max_{t\to x}(u_1(z,\ t),\ \cdots,\ u_p(z,\ t)),$$

$$h(u,\ x)=\prod_{s\to u}\prod_{t\to x} P_{pg(s,t)}^{f(s,t)},$$

则有（下文中单独的 w 均指 $w_x u$）

$$f(u_i,\ x_i)=\mathrm{ep}_{pg(u_i,x_i)} h(w,\ x).$$

从而有 $\widetilde{B}$，使得在 $r\leqslant u$ 时有（下文中 $\hat{u}_i$ 表 $u_i(r,\ x)$，$\hat{x}_i$ 表 $x_i(r,\ x)$）：

$$\begin{aligned} f(r,\ Sx) &= B(r,\ x,\ f(\hat{u}_1,\ \hat{x}_1),\cdots,f(\hat{u}_s,\ \hat{x}_s)) \\ &= \widetilde{B}(r,\ x,\ h(w,\ x)). \end{aligned}$$

故得

$$h(u,\ 0)=\prod_{s\to u}\prod_{t\to 0} P_{pg(s,t)}^{f(s,t)}=\prod_{s\to u} P_{pg(s,0)}^{A(s)}=\widetilde{A}(u),$$

$$\begin{aligned} h(u,\ x+1) &= h(u,\ x)\cdot\prod_{s\to u} P_{pg(s,x+1)}^{f(s,x+1)} \\ &= \prod_{s\to u}\prod_{t\to x} P_{pg(s,t)}^{\mathrm{ep}(pg(s,t),h(w,x))}\cdot\prod_{s\to u} P_{pg(s,x+1)}^{\widetilde{B}(s,x,h(w,x))} \\ &= \widetilde{\widetilde{B}}(u,\ x,\ h(w,\ x)) \\ &= \widetilde{\widetilde{B}}(u,\ x,\ h(w_x u,\ x)). \end{aligned}$$

如命

$$w_x^i u = \operatorname*{itr}_{y\to(u,i)} w_x y\ (=w_x w_x\cdots w_x u),$$

又命

$$q(u,\ l,\ x)=\begin{cases} h(w_l^{l\dot{-}x}u,\ x), & \text{当 } x\leqslant l \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x>l \text{ 时}, \end{cases}$$

则当 $Sx\leqslant l$ 时有

$$q(u,\ l,\ 0)=h(w_l^l u,\ 0)=\widetilde{A}(w_l^l u),$$

$$
\begin{aligned}
q(u,\ l,\ x+1) &= h(w_l^{l \dot{-} Sx}u,\ x+1) \\
&= \widetilde{B}(w_l^{l \dot{-} Sx}u,\ x,\ h(w_l w_l^{l \dot{-} Sx}u,\ x)) \\
&= \widetilde{B}(w_l^{l \dot{-} Sx}u,\ x,\ h(w_l^{l \dot{-} x}u,\ x)) \\
&= \widetilde{B}(w_l^{l \dot{-} Sx}u,\ x,\ q(u,\ l,\ x)).
\end{aligned}
$$

故 $q(u,\ l,\ x)$ 极易用原始递归式来定义．既定义 q 后，即得

$$
h(u,\ x) = h(w_x^{x \dot{-} x}u,\ x) = q(u,\ x,\ x),
$$

$$
f(u,\ x) = \mathrm{ep}_{pg(u,x)}h(u,\ x).
$$

参数变异递归式是很有用的，但什么时候该使用它却不是那么容易看出的．例如，如果欲构造函数 $f(u,\ n)$：

$$
f(u,\ n) = B(A_n(u),\cdots,\ B(A_2(u),\ B(A_1(u),\ A_0(u)))),
$$

那末，显然应使用原始递归式：

$$
\begin{cases}
f(u,\ 0) = A_0(u), \\
f(u,\ x+1) = B(A_{x+1}(u),\ f(u,\ x)).
\end{cases}
$$

但如果欲构造下列函数 $f(u,\ n)$：

$$
\begin{aligned}
&f(u,0) = A_0(u), \\
&f(u,1) = B(A_0(u), A_1(u)), \\
&f(u,2) = B(A_0(u), B(A_1(u), A_2(u))), \\
&f(u,3) = B(A_0(u), B(A_1(u),\ B(A_2(u), A_3(u)))), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

这时，要想写出 $f(u,\ x)$ 的递归式却不是那么简单．

今可先定义 $g(v,\ u,\ x)$：

$$
\begin{aligned}
g(v,\ u,\ x) = B(A_v(u),\ B(A_{v+1}(u),\ B(A_{v+2}(u),\cdots, \\
B(A_{v+x-1}(u),\ A_{v+x}(u))\cdots).
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{cases}
g(v,\ u,\ 0) = A_v(u), \\
g(v,\ u,\ x+1) = B(A_v(u),\ g(v+1,\ u,\ x)).
\end{cases}
$$

这是参数变异的递归式，可化归为原始递归式及迭置．然后，

$$f(u, x)=g(0, u, x).$$

故 $f(u, x)$ 也为原始递归于諸 A 及 B 的函数.

(四) **嵌套递归式**

如果右端出現的 f 値中(当然是在前的)的参数不但是 u 与 x 的已知函数,而且还依賴于 f 的某些前行值,那末这种递归式便叫做**嵌套递归式**. 例如

$$\begin{cases} f(u, 0)=A(u), \\ f(u, x+1)=B(u, x, f(C(u, x, f(u, x)), x)). \end{cases}$$

这种递归式亦可化归为原始递归式,为节省篇幅起見,这一点将在后面討論嵌套多重递归式时一起討論.

(五) **含有初等算子的递归式**

在递归式的右端,有时可出現算子,如果这些算子作用于已知函数,那末可先把算子作用的結果(仍为已知函数)求出,这时便变成沒有算子的递归式了. 因此, 这里所說的含算子的递归式是指算子作用于待求函数的情形来說的.

設待求函数为 $f(u, x)$, 而递归式为

$$\begin{cases} f(u, 0)=A(u), \\ f(u, Sx)=B(u, x, f(u_i, x_i), \underset{r\to Q_i(u,x)}{\alpha_i} f(u_i', r), \\ \qquad\qquad \underset{q\to R_i(u,x)}{\beta_i} f(q, x_i')). \end{cases} \tag{*}$$

这里的第二式右端, 除出現 u、x、f 的前行值 $f(u_i, x_i)$ 以外, 还出現两組算子. 第一組算子 α_i 是以递归变元 x 为其作用变元的, 第二組算子 β_i 是以参数 u 为其作用变元的.

显然, 算子 α 的模必須 $\leqslant x$, 否則, 旣然 $f(u, Sx)$ 以后的値尙未求出, $\underset{r\to Q(r,x)}{\alpha}$ 便无法計算的了. 因此, 对 α 說来, 必然有一函数 M, 使得

$$\underset{r\to Q}{\alpha} f(u, r)=M(u, Q(u,x), \prod_{i\to x} P_{pg(u,i)}^{f(u,i)}).$$

β 既以参数 u 为其作用变元, 它可以不是初等算子. 在这样

情况下,如何把上述递归式中的算子β消去殊成問題,目前暂不討論.

但假定 $\underset{x\to y}{\beta}$ 为初等算子,且設其模为 $H(y)$. 这时,又有一函数 M', 使得

$$\underset{q\to R(u,x)}{\beta} f(q,x)=M'(x,\ R(u,x),\ \prod_{t\to H(R(u,x))} P_{pg(t,x)}^{f(t,x)}).$$

在这情况下, 上述的 $f(u,x)$ 即可改用原始递归式及迭置来定义.

定理 只含初等算子的单重递归式可化归为原始递归式及迭置.

証明 仍就前例討論(一般情形可以同法来討論). 試命

$$g(u,\ x)=\prod_{t\to u}\prod_{i\to x} P_{pg(t,i)}^{f(t,i)},$$

并命

$$w(u,x)=\max_i(u_i(u,x),x_i(u,x),u'_i(u,x),x'_i(u,x),H_iR_i(u,x)).$$

則显然有:

$$f(u_i,\ x_i)=\mathrm{ep}(pg(u_i,\ x_i),\ g(w,\ x)),$$

又有

$$f(y,\ x'_i)=\mathrm{ep}(pg(y,\ x'_i),\ g(w,\ x)),\quad y\leqslant H_iR_i(u,\ x)\text{时};$$

$$f(u'_i,\ y)=\mathrm{ep}(pg(u'_i,\ y),\ g(w,\ x)),\quad y\leqslant x\text{ 时}.$$

从而上面的递归式(*)中的第二式子可写为

$$\begin{aligned}f(u,\ Sx)=B(u,\ x,\ &\mathrm{ep}(pg(u_i,\ x_i),\ g(w,\ x)),\\ &\underset{r\to Q_i(u,x)}{\alpha_i}\mathrm{ep}(pg(u'_i,\ r),\ g(w,\ x)),\\ &\underset{q\to R_i(u,x)}{\beta_i}\mathrm{ep}(pg(q,\ x'_i),\ g(w,\ x))).\end{aligned}$$

由于这里的 $g(w,x)$ 不被算子 α 及 β 所作用(它与 r、q 均无关),故如命

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(u,x,v)=B(u,x,&\mathrm{ep}(pg(u_i,x_i),v),\underset{r\to Q_i(u,x)}{\alpha_i}\mathrm{ep}(pg(u'_i,r),v),\\ &\underset{q\to R_i(u,x)}{\beta_i}\mathrm{ep}(pg(q,\ x'_i),\ v)),\end{aligned}$$

则得

$$f(u, Sx)=\widetilde{B}(u, x, g(w+\delta, x)) \quad (\delta \text{ 可任意}).$$

故稍作計算便得

$$g(u, 0)=\prod_{t\to u}\prod_{i\to 0} P_{pg(t,i)}^{f(t,i)}=\prod_{t\to u} P_{pg(t,0)}^{A(t)}=\hat{A}(u);$$

$$\begin{aligned} g(u, Sx) &= g(u, x)\prod_{t\to u} P_{pg(t,Sx)}^{f(t,Sx)} \\ &= g(u, x)\prod_{t\to u} P_{pg(t,Sx)}^{\widetilde{B}(t,x,g(w(t,x),x))} \\ &= g(u, x)\prod_{t\to u} P_{pg(t,Sx)}^{\widetilde{B}(t,x,g(\hat{w},x))} \\ &= \hat{B}(u, x, g(u, x), g(\hat{w}, x)) \end{aligned}$$

(其中 $\hat{w}=\max\limits_{t\to u} w(t, x)$).

这是参数变异递归式. 定义了 g 之后即可定义 f:

$$f(u, x)=\mathrm{ep}_{pg(u,x)}g(u, x).$$

故定理得証.

(六) **定义算子的递归式**

此外,还有許多别种递归式. 下面再討論一种,即用以定义算子的递归式.

递归式只能用以定义函数, 因此,所謂定义一算子(例如定义 $\underset{x\to y}{\alpha}$) 只能理解为: 根据 $f(u, x)$ 之值(及一些已知函数的值)而定义 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 之值(如果 α 的作用域含有多个函数, 亦仿此討論). 函数 f 可以叫做这种递归式的**根源函数**.

当利用递归式来定义 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 时, 当然不能以作用变元 x 作为递归变元(因 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 实际上与作用变元 x 无关); 并且永可把参数表成新添变元(例如,把 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 表成 $\underset{(t,x)\to(u,y)}{\tilde{\alpha}} f(t, x)$, 对算子 α 說来, u 是参数,但对算子 $\tilde{\alpha}$ 說来, u 却是新添变元), 因此下面永远假定: 在定义算子的递归式中都是以新添变元作递归变元的. 在这約定之下,定义算子的递归式一般地可表成:

$$\begin{cases} \underset{x\to 0}{\alpha} f(u, x) = A(u), \\ \underset{x\to Sn}{\alpha} f(u, x) = B(u, n, f(\beta, \gamma), \underset{x\to\delta}{\alpha} f(\varepsilon, \zeta)). \end{cases} \qquad (**)$$

这里，β、γ、δ 等都是 u 和 n 的函数且 $\delta\leqslant n$，而 ε 和 ζ 則是 u、n、x 的函数；$f(\beta, \gamma)$ 可以叫做**塡充項**，$\underset{x\to\delta}{\alpha} f(\varepsilon, \zeta)$ 則叫做**前行項**；塡充項与前行項都可以有好多个(并不限于一个)，f 作为已知.

根据前行項的性质，可以分成下述两情形来討論.

第一，ε 不含 x(只含 u 及 n)而 ζ 即为 x 本身. 这时 $\underset{x\to\delta}{\alpha} f(\varepsilon, x)$ 可說是"基本上"和 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 相同；更明确些說，如果把 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 記为 $g(u, y)$，則根据对新添变元及参数作迭置的結果，有：

$$\underset{x\to\delta}{\alpha} f(\varepsilon, x) = g(\varepsilon, \delta),$$

这时上述的递归式(**)便可写成

$$\begin{cases} g(u, 0) = A(u), \\ g(u, Sn) = B(u, n, f(\beta, \gamma), g(\varepsilon, \delta)), \end{cases}$$

且有 $\delta\leqslant n$. 这时，在整个递归式中沒有算子的出現(除非表达式 $B(u, n, r, s)$ 本身有算子)，这类递归式正是上面討論过的各种递归式(注意：f 是已知的)，沒有什么新奇的地方.

第二，或者 ε 中含有 x，或者 ζ 不是 x 本身(它可以是含 x 的复杂表达式，亦可以是不含 x 的表达式). 显然，这时即使把 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 表为 $g(u, y)$，但 $\underset{x\to\delta}{\alpha} f(\varepsilon, \zeta)$ 是不能表成 $g(u, y)$ 和 δ、ε、ζ 等的迭置的. 因此，递归式(**)便截然不同于以前討論过的各种递归式，而是一种全新的递归式. 在这种递归式中，把 $\underset{x\to y}{\alpha} f(u, x)$ 写成 $g(u, y)$ 并沒有好处，最好仍是把算子 α 表示出来，因此它便叫做**定义算子的递归式**.

举几个这种递归式的例子如下：

(1) $\underset{(x, y)\to 0}{\alpha} \{A(x, u), B(x, y)\} = A(0, u)$,

$$\underset{(x,y)\to Sn}{\alpha}\{A(x,u),\ B(x,y)\}$$
$$=B(A(0,u),\ \underset{(x,y)\to n}{\alpha}\{A(Sx,u),\ B(x,y)\}).$$

这里前行項为 $\underset{(x,y)\to n}{\alpha}\{A(Sx,u),\ B(x,y)\}$，而填充項为 $A(0,u)$ 及整个第二递归式右端.

在这递归式中，凡在 α 的作用域中出现的 B 项都是 $B(x,y)$ 本身,沒有任何改变. 因此,通常便把"$B(x,y)$"省略不写,从而递归式(1)可簡写为:

$$\begin{cases}\underset{x\to 0}{\alpha}\ A(x,u)=A(0,u),\\ \underset{x\to Sn}{\alpha}\ A(x,u)=B(A(0,u),\ \underset{x\to n}{\alpha}\ A(Sx,u)).\end{cases}$$

对这递归式說来,填充項为 $A(0,u)$，前行項为 $\underset{x\to n}{\alpha}\ A(Sx,u)$ (u相当于 ε，而 Sx 相当于 ζ，它含有作用变元 x).

如把 $\underset{x\to n}{\alpha}\ A(x,u)$ 写为 $g(u,x)$，讀者試依次求 $g(u,0)$、$g(u,1)$、$g(u,2)$、$g(u,3)$ 各值便可看出 $g(u,x)$ 各值的組成規律.

(2) $$\begin{cases}\underset{x\to 0}{\alpha}\ \gamma(x)=\gamma(0),\\ \underset{x\to Sn}{\alpha}\ \gamma(x)=\beta(u,\ x,\ \underset{x\to n}{\alpha}\ \gamma(\delta(x))).\end{cases}$$

这里沒有填充項,前行項为 $\underset{x\to n}{\alpha}\gamma(\delta(x))$，$\delta(x)$ 相当于 ζ (它含有作用变元 x). 讀者亦可把 $\underset{x\to n}{\alpha}\gamma(x)$ 的前几个值及其組成規律求出.

(3) 胡世华先生曾討論下列的递归式及其推广

$$\begin{cases}\underset{x\to 0}{F}\ \gamma(x)=\gamma(0),\\ \underset{x\to Sn}{F}\ \gamma(x)=\beta(n,\ \underset{x\to n}{\alpha}\ \gamma(\gamma_1(x)),\ \cdots,\ \underset{x\to n}{\alpha}\ \gamma(\gamma_k(x)))\end{cases}$$

(見数学学报 6 卷 1 期(1956) 93～104 頁). 这里沒有填充項,前行項为 $\underset{x\to n}{\alpha}\ \gamma(\gamma_t(x))$ ($1\leqslant t\leqslant k$)，其中 $\gamma_t(x)$ 相当于 ζ (它含有作用变元).

此外,类似的例子还多,这里不再列举了.

(1)、(2) 两递归式虽不能直接表成以前討論过的递归式，但却极易化归成参数变异的递归式. 事实上，对递归式(1)說来，如用

$$g(v, u, y) \text{ 表 } \underset{x\to y}{\alpha} A(v+x, u),$$

则 g 可由下列的参数变异递归式

$$\begin{cases} g(v, u, 0) = A(v, u), \\ g(v, u, Sn) = B(A(v, u), g(v+1, u, n)) \end{cases}$$

来定义，既定义了 g，即可如下定义 $\underset{x\to y}{\alpha} A(x, u)$:

$$\underset{x\to y}{\alpha} A(x, u) = g(0, u, y).$$

对递归式(2)說来，仍可用 $g(v, u, y)$ 表 $\underset{x\to y}{\alpha} \gamma(\delta^v(x))$，然后仿递归式(1)那样，先用参数变异递归式定义 $g(v, u, y)$，再作定义

$$\underset{x\to y}{\alpha} \gamma(x) = g(0, u, y).$$

表面看来，例(3)基本上与例(2)类似，只是作了一点很微小的推广（把一个 $\delta(x)$ 推广为 k 个 $\gamma_t(x)$），但实际上要对例(3)作化归却困难得多. 胡世华先生使用了相当复杂的論証才証明了由递归式 (3) 所定义的 $\underset{x\to n}{F} \gamma(x)$ 是原始递归于 β、γ 及 $\gamma_t(1\leqslant t\leqslant k)$ 的函数(其論証太繁，今略).

看来，由更一般的递归式(**)所定义的函数 $\underset{x\to n}{\alpha} f(u, x)$ 也是原始递归于 A、B、β、γ、δ、ε、ζ 及 f 的函数（而且，似乎也可仿胡世华先生的論証那样来証明），从而定义算子的递归式并沒有超出原始递归式的范圍. 但关于这方面的工作还沒有人詳細研究过，所以这个猜測的正确性迄今还无法断定.

习　题

1. 下列递归式是什么递归式？求証它們均可以化归为原始递归式及迭

置:

(1) (Segre 迭代式)

$$\begin{cases} f_1(u, 0)=A_1(u), \\ f_2(u, 0)=A_2(u), \\ f_3(u, 0)=A_3(u), \\ f_1(u, Sx)=B_1(u, x, f_1(u, x), f_2(u, x), f_3(u, x)), \\ f_2(u, Sx)=B_2(u, x, f_1(u, Sx), f_2(u, x), f_3(u, x)), \\ f_3(u, Sx)=B_3(u, x, f_1(u, Sx), f_2(u, Sx), f_3(u, x)); \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f_1(u, 0)=A_1(u), \\ f_2(u, 0)=A_2(u), \\ f_3(u, 0)=A_3(u), \\ f_1(u, 1)=B_1(u), \\ f_2(u, 1)=B_2(u), \\ f_3(u, 1)=B_3(u), \\ f_1(u, x+2)=C_1(u, x, f_1(u, x), f_2(u, Sx), f_3(u, Sx)), \\ f_2(u, x+2)=C_2(u, x, f_1(u, x+2), f_2(u, Sx), f_3(u, x)), \\ f_3(u, x+2)=C_3(u, x, f_1(u, x+2), f_2(u, x+2), f_3(u, Sx)). \end{cases}$$

2. 在正文所列的关于 $f(u, x)$ 的串值递归式中:

(1) 若命 $g(u, x)=pg^x f(u, 0)\, f(u, 1)\cdots f(u, x)$;

(2) 若命 $g(u, x)=\underset{i\to x}{\mathrm{seq}}\, f(u, i)$;

(3) 若命 $g(u, x)=\prod_{i\to x} P_i^{f(u,i)}$,

求証 $g(u, x)$ 原始递归于 A、B. 从而 $f(u, x)$ 亦然.

3. Fibonaci 数列如下定义:

$$\begin{cases} a_0=0, \\ a_1=1, \\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}. \end{cases}$$

試問:这是什么递归式? 并証明其可化归为原始递归式及迭置.

4. 試将三个函数的串值联立递归式的通式列出,并将它化归为原始递归式及迭置.

5. 試将下列递归式化归为原始递归式及迭置. 如有簡法则尽管用簡法,不必用正文中的通法.

$$(1) \begin{cases} f(u, 0)=A(u), \\ f(u, Sx)=B(u, x, \sum_{t\to x} f(u, t)); \end{cases}$$

[提示：令 $g(u, x)=\sum_{t\to x} f(u, t)$，然后把这递归式看作 f 与 g 的联立递归式.]

(2) $f(0)=a(0)$,

$f(1)=a(1)^{a(0)}$,

$f(2)=a(2)^{a(1)^{a(0)}}$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$

(3) $f(0)=a(0)$,

$f(1)=a(0)^{a(1)}$,

$f(2)=a(0)^{a(1)^{a(2)}}$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$

(4) $f(0)=a(0)$,

$f(1)=a(0)\dot{-}a(1)$,

$f(2)=a(0)\dot{-}(a(1)\dot{-}a(2))$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$

(5) $\begin{cases} f(u, 0)=u+1, \\ f(u, Sx)=2^{\prod_{i\to x} f(u,i)}\cdot\sum_{i\to x} f(u, i); \end{cases}$

(6) $\begin{cases} f(u, 0)=u+1, \\ f(u, Sx)=2\prod_{i\to x^2} f(i, x)\cdot\sum_{i\to x^3} f(i, x); \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \underset{i\to 0}{\alpha}\, f(i)=f(0), \\ \underset{i\to n+1}{\alpha}\, f(i)=f(n)+\prod_{s\to n}\underset{i\to s}{\alpha}\, f(i+1); \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \underset{(x,y)\to(u,0)}{\alpha} f(x, y)=u, \\ \underset{(x,y)\to(u,n+1)}{\alpha} f(x, y)=f(x, \underset{(x,y)\to(u^2,u)}{\alpha} f(x, y)). \end{cases}$

6. (1)試把参数变异递归式化归为参数变异复迭式；

(2)在参数变异递归式中，如果新参数只是旧参数的函数而与递归变元无关，能否不用变元归一法，而把它化归为原始递归式及迭置. 試討論下例：

$$\begin{cases} f(u, 0)=A(u), \\ f(u, Sx)=B(u, x, f(\varphi(u), x)). \end{cases}$$

7. 設

$$\begin{cases} g(v, u, 0)=A_v(u), \\ g(v, u, Sx)=B(A_v(u), g(v+1, u, x)); \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(v, u, 0)=v, \\ g_1(v, u, Sx)=g_1(B(A_x(u), v), u, x). \end{cases}$$

試求 $g(v, u, x)$ 及 $g_1(v, u, x)$；并証明

$$g(0, u, x)=g_1(A_x(u), u, x).$$

§4 多重递归式

以上各递归式都可以叫做单重递归式. 单重递归式的特点是：在递归式右端所出現的"在前的"f 值，都具有这样的性質：即它們的某一个变元(所謂递归变元)的变值較当前的 f 值的相应变元的变值为小. 换言之，在单重递归式中，只須就一个递归变元的变值大小加以比較便可以判定出現在右端的 f 值全是在前的 f 值了. 由于递归变元只是一个，而比較前后又以递归变元变值的大小为准，故称之为**单重递归式**.

但是，还有这样的递归式，要看出其右端所出現的 f 值是"在前的"f 值，不能只看某一个变元的大小，而須同时比較几个变元的大小(这些变元都叫做递归变元). 而比較大小时是采用"字典次序法"的. 設須比較三变元組 x_1、x_2、x_3 的大小，則字典次序法是：

$$x_1, x_2, x_3 \text{ 在 } x_1', x_2', x_3' \text{ 之前}$$

当且仅当：

或者 $x_1<x_1'$,

或者 $x_1=x_1'$, 但 $x_2<x_2'$,

或者 $x_1=x_1'$ 且 $x_2=x_2'$, 但 $x_3<x_3'$.

凡比較 f 值前后时須比較几个变元的大小，且依字典次序法而比較的，便叫做**多重递归式**. 如果递归变元有 n 个，便叫做 **n 重递归式**.

例如，下式便是三重递归式的例子：

$$f(u, 0, 0, 0)=A_1(u),$$

$$f(u, 0, 0, Sx_3)=A_2(u, x_3, f(u^{[1i]}, 0, 0, x_3^{(1i)})),$$

$$f(u, 0, Sx_2, 0)=A_3(u, x_2, f(u^{[2i]}, 0, x_2^{(2i)}, x_3^{[2i]})),$$

$$f(u, 0, Sx_2, Sx_3) = A_4(u, x_2, x_3, f(u^{[3i]}, 0, x_2^{(3i)}, x_3^{[3i]}),$$
$$f(u^{[4i]}, 0, Sx_2, x_3^{(4i)})),$$
$$f(u, Sx_1, 0, 0) = A_5(u, x_1, f(u^{[5i]}, x_1^{(5i)}, x_2^{[5i]}, x_3^{[5i]})),$$
$$f(u, Sx_1, 0, Sx_3) = A_6(u, x_1, x_3, f(u^{[6i]}, x_1^{(6i)}, x_2^{[6i]}, x_3^{[6i]}),$$
$$f(u^{[7i]}, Sx_1, 0, x_3^{(7i)})),$$
$$f(u, Sx_1, Sx_2, 0) = A_7(u, x_1, x_2, f(u^{[8i]}, x_1^{(8i)}, x_2^{[8i]}, x_3^{[8i]}),$$
$$f(u^{[9i]}, Sx_1, x_2^{(9i)}, x_3^{[9i]})),$$
$$f(u, Sx_1, Sx_2, Sx_3)$$
$$= B(u, x_1, x_2, x_3, f(u^{[10i]}, x_1^{(10i)}, x_2^{[10i]}, x_3^{[10i]}),$$
$$f(u^{[11i]}, Sx_1, x_2^{(11i)}, x_3^{[11i]}), f(u^{[12i]}, Sx_1, Sx_2, x_3^{(12i)})).$$

这里，凡附有方括号肩碼的量可取任意大小的数值；附有圓括号肩碼的量则必須满足：

$$x_i^{(\ )} \leqslant x_i \quad (i=1, 2, 3).$$

又，凡附有括号肩碼的量（不論为方括号还是圓括号）均为 u、x_1、x_2、x_3 的函数，卽

$$u^{[ij]} = u^{[ij]}(u, x_1, x_2, x_3),$$
$$x^{(ij)} = x^{(ij)}(u, x_1, x_2, x_3), \text{ 等等.}$$

又，括号中的"i"表示这类的項可不止一个，例如，第二式詳細写出应为：

$$f(u, 0, 0, Sx_3) = A_2(u, x_3, f(u^{[11]}, 0, 0, x_3^{[11]}),$$
$$\cdots, f(u^{[1p]}, 0, 0, x_3^{(1p)})).$$

各項的个数（卽 p）必須是固定的（因 A_2 的变元个数是固定的）. 但 $[1i]$ 的个数未必与 $[2i]$ 的个数相同. 前面七个式子（其左端的变元中至少有一变元为 0）叫做**开始值式子**，最后一式叫做**递归式子**. 显見，就 n 重递归式言，我們有 2^n-1 个开始值式子，只有一个递归式子.

在上述的例子中，以及在一般的 n 重递归式中，开始值的式子仍是很复杂的，用下法可把开始值的公式变得非常簡单.

我們知道 $u^{[\ ]}$, $x_i^{(\ )}$, $x_i^{[\ ]}$ 等均为 u、x_1、x_2、x_3 的函数. 今引入下列記号:

$$\begin{aligned}
&\text{記} \quad u^{[\ ]}(u,\ x_1 \dot{-} 1,\ x_2 \dot{-} 1,\ x_3 \dot{-} 1) \quad \text{为} \quad \tilde{u}^{[\ ]},\\
&\text{記} \quad x_i^{(\ )}(u,\ x_1 \dot{-} 1,\ x_2 \dot{-} 1,\ x_3 \dot{-} 1)+1 \ \text{为} \quad \tilde{x}_i^{(\ )},\\
&\text{記} \quad x_i^{[\ ]}(u,\ x_1 \dot{-} 1,\ x_2 \dot{-} 1,\ x_3 \dot{-} 1)+1 \ \text{为} \quad \tilde{x}_i^{[\ ]}.
\end{aligned}$$

設命

$$\begin{cases} g(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3)=0, & \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时},\\ g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1)=f(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3), \end{cases}$$

則显有下列的关系({ }表示或方括号或圓括号):

$$f(u^{[\ ]},\ x_1^{\{\ \}},\ x_2^{\{\ \}},\ x_3^{\{\ \}})=g(\tilde{u}^{[\ ]},\ \tilde{x}_1^{\{\ \}},\ \tilde{x}_2^{\{\ \}},\ \tilde{x}_3^{\{\ \}}).$$

故得

$$g(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3)=0, \qquad \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时},$$

$$g(u,\ Sx_1,\ Sx_2,\ Sx_3)$$

$$=\begin{cases}
A_1(u), & \text{当 } x_1=x_2=x_3=0 \text{ 时},\\
A_2(u,\ x_3 \dot{-} 1,\ g(\tilde{u}^{[1i]},\ 1,\ 1,\ \tilde{x}_3^{(1i)})), & \text{当 } x_1=x_2=0,\ x_3\neq 0 \text{ 时},\\
A_3(u,\ x_2 \dot{-} 1,\ g(\tilde{u}^{[2i]},\ 1,\ \tilde{x}_2^{(2i)},\ \tilde{x}_3^{[2i]})), & \text{当 } x_1=x_3=0,\ x_2\neq 0 \text{ 时},\\
A_4(u,\ x_2 \dot{-} 1,\ x_3 \dot{-} 1,\ g(\tilde{u}^{[3i]},\ 1,\ \tilde{x}_2^{(3i)},\ \tilde{x}_3^{[3i]}), & \\
\quad g(\tilde{u}^{[4i]},\ 1,\ x_2+1,\ \tilde{x}_3^{(4i)})), & \text{当 } x_1=0,\ x_2x_3\neq 0 \text{ 时},\\
A_5(u,\ x_1 \dot{-} 1,\ g(\tilde{u}^{[5i]},\ \tilde{x}_1^{(5i)},\ \tilde{x}_2^{[5i]},\ \tilde{x}_3^{[5i]})), & \text{当 } x_1\neq 0,\ x_2=x_3=0 \text{ 时},\\
A_6(u,\ x_1 \dot{-} 1,\ x_3 \dot{-} 1,\ g(\tilde{u}^{[6i]},\ \tilde{x}_1^{(6i)},\ \tilde{x}_2^{[6i]},\ \tilde{x}_3^{[6i]}), & \\
\quad g(\tilde{u}^{[7i]}, x_1+1, 1, \tilde{x}_3^{(7i)})), & \text{当 } x_1x_3\neq 0,\ x_2=0 \text{ 时},\\
A_7(u,\ x_1 \dot{-} 1,\ x_2 \dot{-} 1,\ g(\tilde{u}^{[8i]},\ \tilde{x}_1^{(8i)},\ \tilde{x}_2^{(8i)},\ \tilde{x}_3^{(8i)}), & \\
\quad g(\tilde{u}^{[9i]}, x_1+1, \tilde{x}_2^{(1i)}, \tilde{x}_3^{[9i]})), & \text{当 } x_1x_2\neq 0, x_3=0 \text{ 时},\\
B(u,\ x_1 \dot{-} 1,\ x_2 \dot{-} 1,\ x_3 \dot{-} 1,\ g(\tilde{u}^{[10i]},\ \tilde{x}_1^{(10i)}, & \\
\quad \tilde{x}_2^{[10i]},\ \tilde{x}_3^{(10i)})), & \text{当 } x_1x_2x_3\neq 0 \text{ 时}.
\end{cases}$$

显然，凑合定义式可合并为一式：由于$x_i^{(\ )}\leqslant x_i$，如使用变元归一法，还可把各$x_i^{(\ )}$均换为x_i，又把各u归一，各$x_i^{[\ ]}$亦归一，因得$g(u, x_1, x_2, x_3)$的定义式如下(其中初值亦可换为任意别的值)：

$$\begin{cases} g(u, x_1, x_2, x_3)=0, & \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时}, \\ g(u, Sx_1, Sx_2, Sx_3)=B(u, x_1, x_2, x_3, g(u^*, x_1, w, w), \\ \qquad g(u^*, Sx_1, x_2, w), g(u^*, Sx_1, Sx_2, x_3)). \end{cases}$$

这里u^*为各$u^{[\ ]}$的最大者(或更大的数，如它們之和)，w为各$x^{[\ ]}$的最大者(或它們之和).

这样，已經把多重递归式化归得相当簡单了，但还可进一步化簡：把B中的递归变元x_1、x_2、x_3除去(而函数前行值的种类数并不增加，对n重递归式說来仍为n种)，其結果叫做**多重复迭式**.

为此，我們引入函数h(仍以三重递归式为例)：

$$h(u, x_1, x_2, x_3)=pg^3x_1x_2x_3\,g(u, x_1, x_2, x_3),$$

于是得：

$$h(u, x_1, x_2, x_3)=pg^3x_1x_2x_30, \qquad \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时},$$

$$\begin{aligned} &h(u, Sx_1, Sx_2, Sx_3) \\ &\quad =pg^3(Sx_1)(Sx_2)(Sx_3)g(u, Sx_1, Sx_2, Sx_3) \\ &\quad =pg^3(Sx_1)(Sx_2)(Sx_3)B(u, x_1, x_2, x_3, g(u^*, x_1, w, w), \\ &\qquad\qquad g(u^*, Sx_1, x_2, w), g(u^*, Sx_1, Sx_2, x_3)). \end{aligned}$$

再作下列替换：

x_1 换为 $K^3h(u^*, x_1, w, w)$,

x_2 换为 $LK^2h(u^*, Sx_1, x_2, w)$,

x_3 换为 $LKh(u^*, Sx_1, Sx_2, x_3)$,

g 换为 Lh (具相应变元),

显見，上式可化为

$$\begin{aligned} &h(u, Sx_1, Sx_2, Sx_3) \\ &\quad =\widetilde{B}(u, h(u^*, x_1, w, w), \\ &\qquad\qquad h(u^*, Sx_1, x_2, w), h(u^*, Sx_1, Sx_2, x_3)). \end{aligned}$$

我們的目的便达到了.

既得 h, 即可用迭置作出 g 及 f:

$$f(u, x_1, x_2, x_3) = g(u, Sx_1, Sx_2, Sx_3) = Lh(u, Sx_1, Sx_2, Sx_3).$$

只要 B 中(或 u^* 中,或 w 中)含有参数 u, 該多重递归式便叫做**具参数的**. 因得:

定理 1 任意 n 重递归式均可化为具参数的多重复迭式,在复迭过程中只使用 n 种前行値 (即 $h(u^*, x_1, w, w)$、$h(u^*, Sx_1, x_2, w)$等, 共 n 种).

注意: 如不是想使前行值种类数减少, 则 x_1、x_2 等可换为 $K^3h(u, x_1, x_2, x_3)$、$LK^2h(u, x_1, x_2, x_3)$ 等.

此外, 如果 u^* 便是 u 本身, 则仿这里的方法还可把 B 中的参数 u 消除,讀者可自行作出.

現在仍就 n 重递归式而討論.

注意: u^* 及 w 可为任意大小, 可具极复杂的結构, 亦可依賴于被定义的函数 g (当然只能依賴于被定义函数 g 的前行値), 故它們的結构很値得研究.

根据 u^*、w 与 u、x_1、x_2、x_3 間的函数关系,可把多重递归式分成三种:

1. u^*、w 均为 u、x_1、x_2、x_3 的已知函数, 则称为**参数变异的多重递归式**;如 $u^*=u$, 特称为**簡易多重递归式**.

2. u^* 可含有被定义的函数 f, 但 w 为 x_1、x_2、x_3 的已知函数(不含有 u), 这时称其为**弱嵌套多重递归式**.

3. u^* 及 w 可含有被定义的函数 f, 而且如果只有 u^* 含有 f 而 w 为已知函数时, w 必含有参数 u, 这时称其为**强嵌套多重递归式**.

下面将証明: 参数变异及弱嵌套的多重递归式均可化为原始递归式及迭置. 但强嵌套多重递归式,一般說来,是不能化为原始递归式及迭置的.

注意：对于单重递归式，我們恒可化强嵌套为弱嵌套．因为，即使递归变元及参数均含有被定义的 f，但使用变元增大法后，递归变元便馬上变成"x"，既不再含有 f，也不含有参数 u，故經过变元增大法后，嵌套单重递归式永远只是弱嵌套而非强嵌套．因此，嵌套单重递归式永远可以化归为原始递归式及迭置．

下面分别討論这三种多重递归式及其化归．

(一) 参数变异多重递归式

我們来証明：参数变异 $n+1$ 重递归式永远可以化为参数变异 n 重递归式．如此逐步做下去，最后便可化为参数变异单重递归式，从而化归为原始递归式及迭置了．下面把参数变异三重递归式化为参数变异二重递归式．

設有参数变异三重递归式(并先对 f 使用变元增大法)为：

$$\begin{cases} f(u, v, x_1, x_2, x_3)=v, & \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时}, \\ f(u, v, Sx_1, Sx_2, Sx_3)=B(u, x_1, x_2, x_3, f(u^*, v, x_1, w, w), \\ \qquad f(u^*, v, Sx_1, x_2, w), f(u^*, v, Sx_1, Sx_2, x_3)). \end{cases}$$

今設法把第三递归变元(最末一个递归变元)消去如下：

設

$$u^*=\varphi(u, x_1, x_2, x_3),$$

$$w=\psi(u, x_1, x_2, x_3).$$

命

$$\pi=\max_{i\to x_3}\varphi(u, x_1, x_2, i),$$

$$\omega=\max_{i\to x_3}\psi(u, x_1, x_2, i).$$

由于先对 f 使用变元增大法，故有 $\hat{B}$ 使得：当 $i\leqslant x_3$ 时

$$f(u, v, Sx_1, Sx_2, Si)=\hat{B}(u, x_1, x_2, i, f(\pi, v, x_1, \omega, \omega), \\ f(\pi, v, Sx_1, x_2, \omega), f(\pi, v, Sx_1, Sx_2, i)).$$

注意：由于 π、ω 皆与 i 无关，故右端三个 f 填式中，前面两个填式亦与 i 无关，試定义(P 还与 x_1、x_2 有关，下面略写了)

$$\begin{cases} P(u, v, a, b, 0)=v, \\ P(u, v, a, b, Si)=\hat{B}(u, x_1, x_2, i, a, b, P(\pi, v, a, b, i)). \end{cases}$$

今証：当 $i\leqslant x_3$ 时有

$$f(u,v,Sx_1,Sx_2,i)=P(u,v,f(\pi,v,x_1,\omega,\omega),\ f(\pi,v,Sx_1,x_2,\omega),i).$$

奠基： $i=0$ 时，左 $=v=$ 右.

归納： 暂把 $f(\pi,v,x_1,\omega,\omega)$ 記为 Q，

把 $f(\pi,v,Sx_1,x_2,\omega)$ 記为 R.

当 $i\leqslant x_3$ 时，有：

$$\begin{aligned}f(u,v,Sx_1,Sx_2,Si)&=\hat{B}(u,x_1,x_2,i,Q,R,f(\pi,v,Sx_1,Sx_2,i))\\&=\hat{B}(u,x_1,x_2,i,Q,R,P(\pi,v,Q,R,i))\quad\text{(归納假設)}\\&=P(u,v,Q,R,Si),\end{aligned}$$

于是，依数学归納法即得証.

今既証明了本断言，即得

$$\begin{cases}f(u,v,x_1,x_2,x_3)=v, & \text{当 } x_1x_2=0,\\ f(u,v,Sx_1,Sx_2,x_3)=P(u,v,f(\pi,v,x_1,\omega,\omega), & \\ \qquad\qquad f(\pi,v,x_1+1,x_2,\omega),x_3). & \end{cases}$$

显然，P 的定义式是参数变异单重递归式，可化归为原始递归式，f 的定义式是参数变异二重递归式(x 看作参数)．这样，参数变异三重递归式便可化归为原始递归式、迭置及参数变异的二重递归式了．再进一步化簡，消去递归变元 x_2，便得参数变异的单重递归式，从而最后便可化归为原始递归式及迭置了．从而得到：

定理 2 参数变异 n 重递归式可以化归为原始递归式及迭置.

（二）弱嵌套多重递归式

凡嵌套递归式(不論强或弱，不論单重或多重)都很难把其一般形状写出，因为經常“套中有套”，而且“套中之套”的层数可以任意之多．例如，即就嵌套单重递归式説来，

$$f(u,Sx)=B(\cdots),$$

在右端可以出現有 $f(u_1,x)$，而 u_1 可依賴于 $f(u_2,x)$，u_2 可依賴于 $f(u_3,x)$，u_3 可依賴于 $f(u_4,x)$，等等，这样便出現了多层嵌套.

要把嵌套递归式的一般形写出来自然是很困难的，即使勉强写出来，用处也不大.

为此，要証明弱嵌套多重递归式可以化归为原始递归式及迭置，我們将从特例入手．但是，讀者容易看見，这里所用的方法是一般的，任何一个弱嵌套递归式都可使用同样的方法而化归为原始递归式及迭置.

設有弱嵌套三重递归式:

$$\begin{cases} f(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3)=0, & \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时}, \\ f(u,\ Sx_1,\ Sx_2,\ Sx_3) & \\ \quad =B_1(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ f(f(f(B_2(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3), & \\ \qquad Sx_1,\ Sx_2,\ x_3),Sx_1,\ x_2,\ C_1),\ x_2,\ C_2,\ C_3)). & \end{cases}$$

这里，右端除出現嵌套的 f 值外，还出現若干个依变元：B_1、B_2、C_1、C_2、C_3；各 B 可为 u、x_1、x_2、x_3 及 f 的填式的函数，而各 C（因弱嵌套的緣故）只是 x_1、x_2、x_3 的已知函数.

一般，递归式右端除出現嵌套的 f 值外，还出現有 s 个 B 函数关系：$\overline{B}_1,\cdots,\ \overline{B}_s$（它們为填以 u、x_1、x_2、x_3 及 f 的填式的函数），及 t 个 C 函数关系：$C_1,\ \cdots,\ C_t$（它們为填以 x_1、x_2、x_3 的已知函数）．只要使用广义么函数，便可假定各 $\overline{B}$ 的变元个数是一样的，設共有 $h+3$ 个变元：$\overline{B}_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_h)$（这里，为方便起見，把由 x_1、x_2、x_3 所占据的变元位置先写出）.

今引入函数 $g(u,\ x)$ 如下:

$$\begin{cases} g(u,\ 0)=0, & \\ g(u,\ Sk)=\begin{cases} u, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(k+1)=0 \text{ 时}, \\ \overline{B}_i(\mathrm{ep}_1(k+1),\ \mathrm{ep}_2(k+1),\ \mathrm{ep}_3(k+1), & \\ \quad g(u,\ \mathrm{ep}_4(k+1)),\cdots,\ g(u,\ \mathrm{ep}_{h+3}(k+1))), & \\ \qquad \text{当 } \mathrm{ep}_0(k+1)=i \text{ 时 } (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s), & \\ 0, & \text{此外（即 } \mathrm{ep}_0(k+1)\geqslant s+1 \text{ 时）}. \end{cases} & \end{cases}$$

由此定义即得

$$u=g(u, 1),$$
$$B_i(x_1, x_2, x_3, g(u, C_1), \cdots, g(u, C_h))$$
$$=g(u, 2^i\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}\cdot 7^{x_3}\cdot P_4^{C_1}\cdot P_5^{C_2}\cdots P_{h+3}^{C_h}).$$

今設法定义 $h(a, b)$，使得

$$g(g(u, a), b)=g(u, h(a, b)).$$

要找出 h 的定义方法，可先研究 $g(u, n)$ 的值. 因为

$$g(g(u, a), 0)=0=g(u, 0),$$

故

$$h(a, 0)=0.$$

其次，

$$g(g(u, a), b+1)$$
$$=\begin{cases} g(u, a), & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=0 \text{ 时}, \\ B_i(\mathrm{ep}_1(b+1), \mathrm{ep}_2(b+1), \mathrm{ep}_3(b+1), \\ \quad g(g(u,a), \mathrm{ep}_4(b+1), \cdots, g(g(u,a), \mathrm{ep}_5(b+1)), \\ \quad \cdots, g(g(u, a), \mathrm{ep}_{h+3}(b+1))) \\ =B_i(\mathrm{ep}_1(b+1), \mathrm{ep}_2(b+1), \mathrm{ep}_3(b+1), \\ \quad g(u, h(a, \mathrm{ep}_4(b+1))), g(u, h(a, \mathrm{ep}_5(b+1))), \\ \quad \cdots, g(u, h(a, \mathrm{ep}_{h+3}(b+1)))) \\ =g(u, 2^i\cdot 3^{\mathrm{ep}_1(b+1)}\cdot 5^{\mathrm{ep}_2(b+1)}\cdot 7^{\mathrm{ep}_3(b+1)}\cdot P_4^{h(a, \mathrm{ep}_4(b+1))}\cdots \\ \quad \cdot P_{h+3}^{h(a, \mathrm{ep}_{h+3}(b+1))}), & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=i \text{ 时}, \\ g(u, 0), & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)\geqslant s+1 \text{ 时}. \end{cases}$$

故得

$$\begin{cases} h(a, 0)=0, \\ h(a, b+1)=\begin{cases} a, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=0 \text{ 时}, \\ 2^i\cdot 3^{\mathrm{ep}_1(b+1)}\cdot 5^{\mathrm{ep}_2(b+1)}\cdot 7^{\mathrm{ep}_3(b+1)}\cdot P_4^{h(a, \mathrm{ep}_4(b+1))}\cdots \\ \quad \cdot P_{h+3}^{h(a, \mathrm{ep}_{h+3}(b+1))}, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=i\ (i=1, \cdots, s), \\ 0, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)\geqslant s+1 \text{ 时}. \end{cases} \end{cases}$$

显然，$h(a, b)$ 为串值单重递归式，可化归为原始递归式及迭置.

今可定义 $l(x_1, x_2, x_3)$，使得

$$g(u,\ l(x_1,\ x_2,\ x_3))=f(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3). \qquad (*)$$

其定义方法如下：

因

$$f(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3)=0=g(u,\ 0), \quad 当\ x_1x_2x_3=0\ 时,$$

故知应有

$$l(x_1,\ x_2,\ x_3)=0, \quad 当\ x_1x_2x_3=0\ 时.$$

其次，有：

$$g(u,\ l(Sx_1,\ Sx_2,\ Sx_3))=f(u,\ Sx_1,\ Sx_2,\ Sx_3)$$
$$=B_1(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ f(f(f(B_2(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3),$$
$$x_1+1,\ x_2+1,\ x_3),\ x_1+1,\ x_2,\ C_1),\ x_1,\ C_2,\ C_3)).$$

今"由內而外"逐步化为 g（依归納假設，前面的 f 值满足(*)式）：

$$B_2(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3)=\overline{B}_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ g(u,\ 1))$$
$$=g(u,\ 2^2\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}\cdot 7^{x_3}\cdot 11^1)$$
$$=g(u,\ d_1),$$

$$f(\overline{B}_2,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3)$$
$$=g(g(u,\ d_1),\ l(x_1+1,\ x_2+1,\ x_3))$$
$$=g(u,\ h(d_1,\ l(x_1+1,\ x_2+1,\ x_3))$$
$$=g(u,\ d_2)=D_2,$$

$$f(D_2,\ x_1+1,\ x_2,\ C_1)$$
$$=g(g(u,\ d_2),\ l(x_1+1,\ x_2,\ C_1))$$
$$=g(u,\ h(d_2,\ l(x_1+1,\ x_2,\ C_1))$$
$$=g(u,\ d_3)=D_3,$$

$$f(D_3,\ x_1,\ C_1,\ C_2)$$
$$=g(g(u,\ d_3),\ l(x_1,\ C_1,\ C_2))$$
$$=g(u,\ h(d_3,\ l(x_1,\ C_1,\ C_2))$$
$$=g(u,\ d_4)=D_4,$$

$$B_1(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ D_4)$$
$$=\overline{B}_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ g(u,\ 1),\ g(u,\ d_4))$$

$$=g(u,\ 2^1\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}\cdot 7^{x_3}\cdot 11^1\cdot 13^{d_4})$$
$$=g(u,\ d_5),$$

即

$$g(u,\ l(Sx_1,\ Sx_2,\ Sx_3))=g(u,\ d_5).$$

故得:

$$l(x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1)=d_5=2^1\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}\cdot 7^{x_3}\cdot 11^1\cdot 13^{d_4}$$
$$=2^1\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}\cdot 7^{x_3}\cdot 11\cdot 13^{h(d_3,\ l(x_1,\ C_1,\ C_2))}.$$

而

$$\begin{aligned}&h(d_3,\ l(x_1,\ C_1,\ C_2))\\&\quad=h(h(d_2,\ l(x_1+1,\ x_2,\ C_1)),\ l(x_1,\ C_1,\ C_2))\\&\quad=h(h(h(d_1,\ l(x_1+1,\ x_2+1,\ x_3)),\\&\qquad\quad l(x_1+1,\ x_2,\ C_1)),\ l(x_1,\ C_1,\ C_2)),\end{aligned}$$

又

$$d_1=2^2\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}\cdot 7^{x_3}\cdot 11,$$

把这些值代入后，記 d_5 的表达式为 $B(x_1,\ x_2,\ x_3,\ l(x_1, C_1, C_2),\ \cdots)$，則得 l 的定义式为:

$$\begin{cases}l(x_1,\ x_2,\ x_3)=0, & \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时},\\ l(x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1)=B(x_1,\ x_2,\ x_3,\ l(x_1,\ C_1,\ C_2), & \\ \qquad\qquad l(x_1+1,\ x_2,\ C_1),\ l(x_1+1,\ x_2+1,\ x_3)). & \end{cases}$$

l 的定义式为参数变异三重递归式，故而可化归为原始递归式及迭置；又 $g(u,\ x)$ 与 $h(a,\ b)$ 亦可由原始递归式及迭置而定义，但 $f(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3)=g(u,\ l(x_1,\ x_2,\ x_3))$，故知 f 亦可化归. 故得:

定理 3 弱嵌套多重递归式可化归为原始递归式及迭置.

（三）**强嵌套多重递归式**

这里将証明，任何强嵌套多重递归式均可化归，使得只含一层嵌套(即至多只有 $f(f\cdots)$，而不再含有 $f(f(f\cdots)))$；其次，在下节再証明，即使只有一重强嵌套，但一般說来，不能化归为原始递归式及迭置. 由后面这个結果便得到一个具体的例子：非原始递

归函数的例子.

这里先討論如何化归为一重嵌套.

設有一个强嵌套 n 重遞归式(就 $n=4$ 討論)如下:

$$f(u, x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \text{ 当 } x_1x_2x_3x_4=0 \text{ 时},$$

$$f(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, x_4+1)$$

$$=B_1(f, B_2, B_3, \cdots, B_s).$$

第二式是說：右端使用了 f 及 s 个函数关系: $B_1, \cdots, B_s$, 其結构可以說是非常复杂的，这里暂时不必明显写出(这里因为討論强嵌套，所以函数 B 与 C 不必区别了)，还可假定各 B_i 的变元个数是一样的,設共 $h+4$ 个变元:

$$B_i=B_i(x_1, x_2, x_3, x_4, v_1, v_2, \cdots, v_h).$$

仿前,先定义一函数 $g(u, x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$g(u, x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \qquad \text{当 } x_1x_2x_3x_4=0 \text{ 时},$$

$$g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, x_4+1)$$

$$=\begin{cases} u, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(x_4+1)=0 \text{ 时}, \\ B_i(x_1, x_2, x_3, \mathrm{ep}_1(x_4+1), g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, \\ \quad \mathrm{ep}_2(x_4+1)), \cdots, g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, \\ \quad \mathrm{ep}_{h+1}(x_4+1))), & \text{当 } \mathrm{ep}_0(x_4+1)=i \text{ 时 } (i=1, \cdots, s), \\ g(U_1, x_1, U_2, U_3, l(U_4)), & \text{当 } \mathrm{ep}_0(x_4+1)=s+1 \text{ 时}, \\ g(U_1, x_1+1, x_2, U_3, l(U_4)), & \text{当 } \mathrm{ep}_0(x_4+1)=s+2 \text{ 时}, \\ g(U_1, x_1+1, x_2+1, x_3, l(U_4)), & \text{当 } \mathrm{ep}_0(x_4+1)=s+3 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(x_4+1)\geqslant s+4 \text{ 时}, \end{cases}$$

这里

$$U_1=g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, \mathrm{ep}_1(x_4+1)),$$

$$U_2=g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, \mathrm{ep}_2(x_4+1)),$$

$$U_3=g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, \mathrm{ep}_3(x_4+1)),$$

$$U_4=g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, \mathrm{ep}_4(x_4+1)).$$

又,这里 $l(x)$ 为一任意函数,但在下面将要选擇 $l(x)$，使得

$$g(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ l(x_4))=f(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4).$$

明白这个目的之后,则上述定义的用意便很显然了.

注意:这里不能作要求:

$$g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ x_4+1)$$
$$=g(U_1,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ l(x_4)).$$

因为无法保障 $l(x_4)\leqslant x_4$, 如果加入这个要求, g 的定义式便不能是多重递归式了.

由这定义,即得(用 U'_C 記 $g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ C)$):

$$u=g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ 1),$$

$$B_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ U'_{C_1},\ \cdots,\ U'_{C_h})$$
$$=g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ 2^i\cdot 3^{x_4}P_2^{C_1}P_3^{C_2}\cdots P_{h+1}^{C_h}),$$

$$g(U'_{C_1},\ x_1,\ U'_{C_2},\ U'_{C_3},\ l(U'_{C_4}))$$
$$=g(u,\ x_1+1,x_2+1,\ x_3+1,\ 2^{s+1}3^{C_1}5^{C_2}7^{C_3}11^{C_4}),$$

$$g(U'_{C_1},\ x_1+1,\ x_2,\ U'_{C_3},\ l(U'_{C_4}))$$
$$=g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ 2^{s+2}3^{C_1}7^{C_3}11^{C_4}),$$

$$g(U'_{C_1},\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3,\ l(U'_{C_4}))$$
$$=g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ 2^{s+3}3^{C_1}11^{C_4}),$$

这由上面的定义式可以知道.

再設法定义 $h(a,\ b)$, 使得

$$g(g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ a),\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ b)$$
$$=g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ h(a,\ b)).$$

因为

$$g(g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ a),\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ 0)$$
$$=0=g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ 0),$$

故得

$$h(a,\ 0)=0.$$

其次,仿上項可知,应有:

$$h(a,\ b+1)$$

$$
=\begin{cases}
a, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=0 \text{ 时}, \\
2^i \cdot 3^{\mathrm{ep}_1(b+1)} \cdot P_2^{h(a,\mathrm{ep}_2(b+1))} \cdots P_{h+1}^{h(a,\mathrm{ep}_{h+1}(b+1))}, & \\
 & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=i \text{ 时 } (i=1, 2, \cdots, s), \\
2^{s+1} \cdot 3^{h(a,\mathrm{ep}_1(b+1))} \cdot 5^{h(a,\mathrm{ep}_2(b+1))} \cdot 7^{h(a,\mathrm{ep}_3(b+1))} \cdot 11^{h(a,\mathrm{ep}_4(b+1))}, & \\
 & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=s+1 \text{ 时}, \\
2^{s+2} \cdot 3^{h(a,\mathrm{ep}_1(b+1))} \cdot 7^{h(a,\mathrm{ep}_3(b+1))} \cdot 11^{h(a,\mathrm{ep}_4(b+1))}, & \\
 & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=s+2 \text{ 时}, \\
2^{s+3} \cdot 3^{h(a,\mathrm{ep}_1(b+1))} \cdot 11^{h(a,\mathrm{ep}_4(b+1))}, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)=s+3 \text{ 时}, \\
0, & \text{当 } \mathrm{ep}_0(b+1)\geqslant s+4 \text{ 时}.
\end{cases}
$$

这是 $h(a, b)$ 的串值单重递归式,对这样的 $h(a, b)$ 説来,有:

$$
g(g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, a), x_1+1, x_2+1, x_3+1, b)
$$
$$
=g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, h(a, b)),
$$

上面的 $l(x)$ 是一任意函数,即不管 $l(x)$ 如何定义, 上面所述的性质均成立. 現在再設法定义 $l(x)$, 使得

$$
f(u, x_1, x_2, x_3, x_4)=g(u, x_1, x_2, x_3, l(x_4)). \qquad (*)
$$

因为

$$
f(u, x_1, x_2, x_3, 0)=0=g(u, x_1, x_2, x_3, 0),
$$

故应有

$$
l(0)=0.
$$

其次,当 $x_1x_2x_3x_4=0$ 时,恒有

$$
g(u, x_1, x_2, x_3, l(x_4))=0=f(u, x_1, x_2, x_3, x_4),
$$

故可只討論 $g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, l(x_4+1))$. 应有:

$$
g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, l(x_4+1))=B_1(f, B_2, B_3, \cdots, B_s).
$$

依归納假設, 对变元 $(x_1+1, x_2+1, x_3+1, x_4+1)$ 以前的变元説来,(*)式成立. 但各 B_i 中各 f 的变元必均在变元$(x_1+1, x_2+1, x_3+1, x_4+1)$ 之前, 因此可把其中的 f 改为相应的 g. 然后再仿前述办法,由內而外地逐步化为 g, 最后必有一式 M 使得

$$
B_1(f, B_2, B_3, \cdots, B_s)=g(u, x_1+1, x_2+1, x_3+1, M).
$$

于是得定义:

$$\begin{cases} l(0)=0, \\ l(x_4+1)=M. \end{cases}$$

如把 M 詳細写出，可知上式为 l 的串值单重递归式，它可化归为原始递归式及迭置.

由上可見，由任意多层嵌套递归式而定义的 f，可借助于 g、h 及 l 的迭置而定义之；h 及 l 的定义式都是串值单重递归式，可化归为原始递归式及迭置；只有 g 的定义式仍是嵌套多重递归式，因为(見第 177 頁) g 的第二递归式(即有关

$$g(u,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ x_4+1)$$

的递归式)其右端含有

$$=g(U_1,\ x_1,\ U_2,\ U_3,\ l(U_4))$$

等等，而 U_1、U_2、U_3、U_4 本身又是 $g(u,\ \cdots)$，这里便出現了嵌套. 不过只是"一层"嵌套. 这样，我們的目的便达到了：

定理 4 任意多层的嵌套，可化归为一层的嵌套. 换言之，嵌套 n 重递归式(以 $n=4$ 为例)可化归为迭置及下形的(一层)嵌套递归式(U_1、U_2、U_3、U_4 及 l 見前)：

$$\begin{cases} g(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0, \qquad \text{当 } x_1x_2x_3x_4=0 \text{ 时}, \\ g(u,\ Sx_1,\ Sx_2,\ Sx_3,\ Sx_4) \\ \quad =B(u,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ g(U_1,\ x_1,\ U_2,\ U_3,\ l(U_4)), \\ \qquad g(U_1,\ x_1+1,\ x_2,\ U_3,\ l(U_4)), \\ \qquad g(U_1,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3,\ l(U_4)), \\ \qquad g(U_1,\ x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1,\ x_4)). \end{cases}$$

习 题

1. 用多重递归式定义下列函数：

(1) $m \dot{-} n$;

(2) $\binom{m}{n}=C_{mn}$, 即 $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$;

(3) $\underset{i\to(m,n)}{E} a(i)$, 即由 $a(0),\cdots,a(n)$ 中任取 m 个所作乘积之和;

(4) n 阶行列式，其元素均为自然数(暫时允許使用通常减法)；

(5) $S_{n,m}$，这里 $S_{n,m}$ 为：当将 $x(x+1)(x+2)\cdots(x+n\dot{-}1)$ 表成多項式时 x^m 的系数，即 $S_{n,m}$ 满足关系式 $x(x+1)(x+2)\cdots(x+n\dot{-}1)=\sum\limits_{m\to n}S_{n,m}x^m$；

(6) $T_{n,m}$，这里 $T_{n,m}$ 是：将 x^n 表为

$$x^{(m)}=x(x-1)\cdots(x-m+1)$$

的綫性組合时 $x^{(m)}$ 的系数，即 $T_{n,m}$ 满足如下关系式

$$x^n=\sum_{m\to n}T_{n,m}x^{(m)}.$$

2. 設

$$\begin{cases}f(0,n)=1,\\ f(m+1,0)=m+1,\\ f(m+1,n+1)=f(m,mn)\cdot f(m+1,n).\end{cases}$$

求 $f(2,n)$、$f(3,n)$、$f(4,n)$、$f(5,5)$諸值.

3. 把

$$\begin{cases}f(u,0)=u+1,\\ f(u,x+1)=2^{\prod\limits_{i\to x^2}f(i,x)}\cdot\sum\limits_{i\to x^3}f(i,x)\end{cases}$$

改用多重递归式定义.

4. 把

$$\begin{aligned}&f(0,n,r)=A(n,r),\\ &f(m+1,0,r)=f(m,1,r),\\ &f(m+1,n+1,r)\\ &\quad=\prod_{i\to r+1}\max(f(m+1,n,i),f(m,i,r))\end{aligned}$$

中的算子消去，另用新的不含算子的递归式来定义.

5. 把下列递归式合并为一个递归式，其中 A、B、C、D、F 已知：

$$\begin{cases}f(0,a)=A(a),\\ f(n+1,a)=g(n,B(n,a,f(n,a)+1,a)),\\ g(n,0,a)=C(n,a),\\ g(n,r+1,a)=h(n,r,g(n,r,a),a),\\ h(n,r,0,a)=D(n,r,a),\\ h(n,r,s+1,a)=F(u,r,s+1,a,h(u,r,s,a)).\end{cases}$$

§5 非原始递归函数之一例

本节将証明，即使只是一层强嵌套，一般說来，却不能够化为

沒有嵌套的递归式；亦即不能化归为原始递归式及迭置．为此，下面来証明：有一些用强嵌套二重递归式所定义的函数，不可能是原始递归函数．

这个例子首先由 W. Ackermann 作出（他第一个找出非原始递归函数的例子）：

$$\begin{cases} f(u,\ 0,\ n)=u+n, \\ f(u,\ m+1,\ 0)=N(m\dot{-}1)+u\cdot N^2(m\dot{-}1), \\ f(u,\ m+1,\ n+1)=f(n,\ m,\ f(u,\ m+1,\ n)). \end{cases}$$

这里用到三元函数．后来 Peter 把它改进，只用二元函数（不再用参数 u）：

$$\begin{cases} f(0,\ n)=n+1, \\ f(m+1,\ 0)=f(m,\ 1), \\ f(m+1,\ n+1)=f(m,\ f(m+1,\ n)), \end{cases}$$

(Peter 的原定义是：$f(0,\ n)=2n+1$，这里的是經 R. Robinson 改簡了的，如把第二式右端改为 u，便是第二章 §6 的 $\varphi_m(u,\ n)$)．

为証明这个函数不是原始递归函数，先来探討关于这个函数的性质．

引理 1　$f(m,\ n)>n$，即：$f(m,\ n)\geqslant n+1$．

証明　奠基：　当 $m=0$ 时本断言成立．

归納：　今討論情形 $m+1$．再用归納法証明（可以叫做小归納）．

小奠基：　当 $n=0$ 时有

$$f(m+1,\ 0)=f(m,\ 1)\geqslant 1+1>0+1.$$

小归納：　对于情形 $n+1$ 說来，

$$\begin{aligned} f(m+1,\ n+1)&=f(m,\ f(m+1,\ n)) \\ &\geqslant f(m+1,\ n)+1 \qquad \text{(由大归納假設)} \\ &\geqslant (n+1)+1 \qquad \text{(由小归納假設)}, \end{aligned}$$

故小归納步驟得証．依数学归納法，大归納步驟得証．再由数学归納法，本引理得証．

引理 2 $f(m, n+1)>f(m, n)$，即当 m 固定时，$f(m, n)$ 是 n 的严格增函数．

証明 当 $m=0$ 时，$f(0, n)=n+1$ 是 n 的严格增函数．

設 $m\neq 0$，它可写成 $m+1$ 形，由引理 1 得

$$f(m+1, n+1)=f(m, f(m+1, n))>f(m+1, n).$$

所以 $f(m+1, n)$ 也是 n 的严格增函数．引理得証．

推論 当 $m_1>m$，$n_1\geqslant n$ 时，$f(m_1, n_1)>f(m, n)$．

有了这些引理后，便可以証明 $f(m, n)$ 不是原始递归函数了．

定理 1 任給一个原始遞归函数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_r)$．設命 $u=\max(x_1, x_2, \cdots, x_r)$，則恒可找出一数 m，使得

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_r)<f(m, u).$$

証明 我們知道，任意一个原始遞归函数，均可由本原函数及 $x\dot{-}y$，$NEx\ (=N(x\dot{-}[\sqrt{x}]^2))$ 出发，經过有限次的迭置及无参数弱原始复迭式而作成．

如果 g 为本原函数或开始函数，則 m 可如下找出：

$$I_{nm}(x_1, \cdots, x_n)\leqslant x_n\leqslant u<u+1=f(0, u),$$

$$O(x_1, \cdots, x_r)=0<1\leqslant u+1=f(0, u),$$

$$Sx=x+1=f(0, x)<f(1, x),$$

$$x\dot{-}y\leqslant\max(x, y)=u<u+1=f(0, u),$$

$$NEx\leqslant 1\leqslant u+1=f(0, u)<f(1, u).$$

如果 g 由迭置作成，即設

$$g(x_1,\cdots, x_r)=A(B_1(x_1,\cdots, x_r),\cdots, B_h(x_1,\cdots, x_r)),$$

而

$$A(a_1, \cdots, a_h)<f(m_0, \max(a_1, \cdots, a_h)),$$

$$B_i(x_1, \cdots, x_r)<f(m_i, u)\quad (i=1, 2, \cdots, h),$$

若命 $\widetilde{m}=\max(m_0, m_1, \cdots, m_h)$，則

$$\begin{aligned} g(x_1, \cdots, x_r) &< f(m_0, \max(f(m_1, u), \cdots, f(m_h, u))) \\ &\leqslant f(\widetilde{m}, f(\widetilde{m}, u)) \\ &< f(\widetilde{m}, f(\widetilde{m}+1, u)) \\ &= f(\widetilde{m}+1, u+1) \\ &< f(\widetilde{m}+2, u). \end{aligned}$$

故可取 $\max(m_0, m_1, \cdots, m_h)+2$ 为所求之 m。

如果 g 由无参数弱复迭式作成，即設

$$\begin{cases} g(0)=0, \\ g(x+1)=Bg(x), \end{cases}$$

而有 m_1 使得 $B(x)<f(m_1, x)$. 今証可取 $m=m_1+1$, 即有

$$g(x)<f(m_1+1, x). \tag{*}$$

奠基： 当 $x=0$ 时显然成立，这是因为 $g(0)=0<f(m_1+1,0)$.

归納： 試討論情形 $x+1$, 則

$$\begin{aligned} g(x+1)=Bg(x) &< f(m_1, g(x)) \\ &< f(m_1, f(m_1+1, x)) \qquad \text{(归納假設)} \\ &= f(m_1+1, x+1), \end{aligned}$$

故归納步驟得証. 依数学归納法，(*)式永眞. 故可取 m_1+1 为相应于 $g(x)$ 的 m.

綜以上討論，可知定理 1 成立.

定理 2 $f(m, n)$ 不可能是原始递归函数. 亦即，用以定义 $f(m, n)$ 的强嵌套二重递归式不可能化归为原始递归式及迭置.

証明 如果 $f(m, n)$ 为原始递归函数，应可找出一数 m_0, 使得：

$$f(m, n)<f(m_0, \max(m, n)).$$

取 $m=n=m_0$, 即得：$f(m_0, m_0)<f(m_0, m_0)$，从这矛盾結果即知定理成立.

习 题

1. 試討論 Péter 所定义的 $f(m, n)$，計算

$$f(1, n)、f(2, n)、f(3, n)、f(4, 4).$$

2. 試对 Ackermann 所定义的 $f(u, m, n)$ 而計算

$$f(u, 0, n)、f(u, 1, n)、f(u, 2, n)、f(3, 3, 3).$$

3. 在 Péter 所定义的 $f(m, n)$ 中，如果作下列更改，結果将如何？

(1) $f(0, n)=n$; (2) $f(0, n)=2n$.

§6 递归式与数学归納法

本章的最后，将談一談递归式与数学归納法的关系.

递归式与数学归納法之間是有很密切关系的. 几乎可以說：每有一种递归式，便有一种数学归納法；反之，每有一种数学归納法，便有一种递归式. 因为，"归納假設"实际上便相当于出現在右端的待定函数的前行值. 前行值可有种种不同的面貌；同样，归納假設亦有种种不同的形式. 我們旣可以根据前行值的面貌而区別不同的递归式，同样也可以根据归納假設的不同形式而区別不同的数学归納法. 例如：

简单归納法对应于原始递归式，

强归納法对应于串值原始递归式，

参变归納法对应于参数变异递归式.

与二重递归式相应的是下列的数学归納法：如果(1) $A(a, 0)$ 眞，(2) 由 $A(t, n)$ 对一切 t 眞推出 $A(0, n+1)$ 眞，(3) 由 $A(t, n)$ 对一切 t 眞及 $A(a, n+1)$ 眞而推出 $A(a+1, n+1)$ 眞；那末便可以証明 $A(a, n)$ 永眞了. 这与二重归納法的类似是很明显的.

在递归式中，有这样的一般递归式，它的"前行值"并不以变元之大小为序，却用别的一种規定. 当然，在数学归納法中，自然也可以"創造"相应的归納法. 奇怪的是，数学史上恰巧很自然地出現下列的数学归納法（可叫做逆推归納法）：

如果由 $A(n+1)$ 眞可推得 $A(n)$ 眞，又如果 $A(n)$ 对无穷个 n 为眞；則可証明 $A(n)$ 永眞.

这种归納法与(某种特殊的)一般递归式相应(讀者可自証之).

在递归算术中可以証明：利用原始递归式所定义函数的唯一性可以推出簡单归納原理；反之，利用簡单归納原理也可以推出原始递归式所定义函数的唯一性. 对别种递归式及别种归納法当然也有类似关系. 这样，就难怪递归式与归納原理那么一一对应了.

在归納証明中，曾介紹过拆裂法，卽在証 $A(n)$ 时，往往先把其中的 n 拆裂成两部分，成为 $B(n,n)$；把一部分 n 改成 u 得 $B(n,u)$，然后对 n 或 u 归納. 証明后再令 $u=n$ 卽得結果. 在递归式中，亦常利用拆裂法. 例如，欲定义 $\sum_{i\to x} F(x, i)$，最好先定义 $\sum_{i\to x} F(v, i)$，然后令 $v=x$ 而得(否則递归式将难于作出). 其他例子还很多，讀者宜多加体会.

在递归函数論中，递归式与摹状式的关系也是很密切的. 我們已經看見，加限原始递归式与受限求逆式之間的密切关系，而一般递归式与不受限的摹状式关系更密切(見第五章§5). 摹状式是求最小根，因此摹状式便与在証明方面所謂**最小根原理**相应，后者是說：

如 $A(n)$ 非永假，則在使 $A(n)$ 眞的 n 中必有最小者.

这在数理邏輯或递归算术中都极易証明：利用数学归納原理可以推出最小根原理；反之，利用最小根原理亦可以推出数学归納原理. 两者力量是等价的. 在推演方面两者旣然关系如此密切，則在函数的定义方面，递归式与摹状式关系之密切也就不足怪了.

习 题

1. 試把逆推归納法与某种一般递归式的关系进行詳細的討論.
2. 試証最小根原理与数学归納原理可以互相推出.
3. 試举出若干个这样的函数的例子：对它本身不能直接用递归式定义；但拆裂后却能直接用递归式定义.

第五章　一般递归函数

§1　一般递归函数与原始递归函数

定义　由本原函数出发，經过有限次迭置与一般递归式所作成的函数叫做**一般递归函数**．如果再加入 $A_1, \cdots, A_s$ 作为开始函数，則所得的函数叫做**一般递归于 $A_1, \cdots, A_s$ 的函数**．

这里所謂一般递归式（参数可有多个，这里只写出一个参数）是指：由已知函数 $A(u)$、$B(u, x, y)$ 及归宿于 0 的函数 $g(u, x)$ 而造出的具下性质的新函数 $f(u, x)$：

$$\begin{cases} f(u,\ 0)=A(u), \\ f(u,\ Sx)=B(u,\ x,\ f(u,\ g(u,\ Sx))). \end{cases}$$

至于"归宿于 0 的函数"，則指具下列性质的任一函数 $g(u, x)$：对任何 x，恒有 m，使

$$\underset{t\to(x,m)}{\text{itr}}\ g(u,\ t)\ (=g_u^m(x))=0.$$

具这样性质的最小的 m，叫做 g 在 x 处的**归宿步驟**．

因为一般递归式与原始递归式（形式上）相差极微，所以先討論一般递归函数与原始递归函数的关系．

定理　一般递归函数集包含原始递归函数集为其眞子集．

証明　两函数集同从本原函数出发，同允許使用迭置，因此只須証明原始递归式为一般递归式的特例便成了．

先定义

$$Dx: \begin{cases} D0=0, \\ DSx=I_{21}(x,\ DOSx). \end{cases}$$

（Ox 为归宿于 0 的函数，归宿步驟为 1）．再取 g 为 D（D 为归宿于 0 的函数，归宿步驟为 x）便得原始递归式，故后者为一般递归式的特例．所以，原始递归函数集显然为一般递归函数集的子集．

欲証原始递归函数集为一般递归函数集的眞子集，只須指出下列函数为一般递归函数(由上已知它非原始递归函数)：

$$\begin{cases} f(0, n)=n+1, \\ f(m+1,0)=f(m, 1), \\ f(m+1, n+1)=f(m, f(m+1, n)). \end{cases}$$

要用一般递归式定义它,須先介紹下列縮写：

Hn 表 n 的最大质因子足碼;

$$a(n)=\begin{cases} \prod_{i\to Hn\dot{-}2} P_i^{\mathrm{ep}(i,n)}, & 当\ Hn\geqslant 2\ 时; \\ 1, & 当\ Hn\leqslant 1\ 时. \end{cases}$$

注意：$a(n)$ 实即从 n 中删去最后两个质因数方幂的結果,如：

$$設\ n=2^4\cdot 3^5\cdot 4^6,\quad 則\ a(n)=2^4.$$

又,将 $HSx\dot{-}1$、HSx、$HSx+1$ 分别簡写为 (-1)、(0) 及 $(+1)$.

今定义 $h(x)$ 如下：

$h(0)=0,$

$$h(Sx)=\begin{cases} h(a(Sx)\cdot P_{(-1)}^{\mathrm{ep}_{(0)}Sx+1}), & 当\ HSx\neq 0,\ 且\ \mathrm{ep}_{(-1)}Sx=1\ 时; \\ h(a(Sx)P_{(-1)}^{\mathrm{ep}_{(-1)}Sx\dot{-}1}P_{(0)}^2), & \\ \qquad 当\ HSx\neq 0,\ 且\ \mathrm{ep}_{(-1)}Sx\geqslant 2,\ 但\ \mathrm{ep}_{(0)}Sx=1\ 时; & \\ h(a(Sx)\cdot P_{(-1)}^{\mathrm{ep}_{(-1)}Sx\dot{-}1}P_{(0)}^{\mathrm{ep}_{(-1)}Sx}P_{(+1)}^{\mathrm{ep}_{(0)}Sx\dot{-}1}), & \\ \qquad 当\ HSx\neq 0,\ 且\ \mathrm{ep}_{(-1)}Sx\geqslant 2,\ 且\ \mathrm{ep}_{(0)}Sx\geqslant 2\ 时; & \\ \mathrm{ep}_0 Sx\dot{-}1, & 当此外情形时. \end{cases}$$

先証：(1)　$h(a(Sx)P_{(-1)}^{Sm}P_{(0)}^{Sn})=h(a(Sx)\cdot P_{(-1)}^{Sf(m,n)})$.

奠基：　$m=0$ 时，左$=h(a(Sx)P_{(-1)}^{n+2})=$右.

归納：　討論情形 $m+1$.大假設为：情形 m 对任何 n 均成立.

小奠基：　$n=0$ 时,

左$=h(a(Sx)P_{(-1)}^{m+2}P_{(0)}^1)=h(a(Sx)P_{(-1)}^{m+1}P_{(0)}^2)=h(a(Sx)P_{(-1)}^{Sf(m,1)})$

$=$右(依大归納假設).

小归納：　討論情形 $n+1$.小假設为：情形 $m+1$ 对 n 成立.

$$左=h(a(Sx)P^{m+2}_{(-1)}P^{n+2}_{(0)})=h(a(Sx)P^{Sm}_{(-1)}P_0^{n+2}P^{Sn}_{(+1)})$$

$$=h(a(Sx)P^{Sm}_{(-1)}P_0^{Sf(m+1,n)}) \qquad (小归納假設)$$

$$=h(a(Sx)P^{Sf(m,f(m+1,n))}_{(-1)}) \qquad (大归納假設)$$

$$=h(a(Sx)P^{Sf(m+1,n+1)}_{(-1)}).$$

故依归納法，断言(1)得証.

(2) $f(m, n)=h(2^{Sm}\cdot 3^{Sn})$.

証明 右$=h(2^{Sm}\cdot 3^{Sn})=h(2^{Sf(m,n)})$ (由上断言)

$=f(m, n)$ (由 h 的定义式).

容易看見，$h(x)$ 的定义可写成下形：

$$h(0)=0,$$

$$h(Sx)=B(x, h(gSx)).$$

而 g 为适当的归宿于 0 的函数(讀者試自作之)，因此 $h(x)$ 可用一般递归式定义(其中只用到初等函数).既定义了 $h(x)$，則 $f(m, n)$ 卽可利用迭置及初等函数而定义了，故知 $f(m, n)$ 为一般递归函数，从而便知原始递归集为一般递归函数集的眞子集. 定理得証.

习　題

1. 試将正文中 $h(x)$ 的定义式写成一般递归式.

2. 試証下列函数为归宿于 0 的函数，如可能者則并求其归宿步驟 $d(x)$ (可任找一組配对函数). 特别地，求在 $pg(x, 0)$ 处的归宿步驟.

(1) $g(x)=\begin{cases} pg(Kx, 4Lx+5), & 当\ Lx<(Kx)^3\ 时, \\ pg(Kx\dot{-}2, (Lx)^2\cdot Kx), & 当\ Lx\geqslant(Kx)^3\ 时; \end{cases}$

(2) $g(x)=\begin{cases} pg(Kx, x^3), & 当\ Lx<2^{Kx}\ 时; \\ pg(Kx\dot{-}1, (Kx)^2\cdot Lx), & 当\ Lx\geqslant 2^{Kx}\ 时; \end{cases}$

(3) $g(x)=\begin{cases} pg(Kx, Lx\dot{-}1), & 当\ Kx\ 为奇数且\ Lx\neq 0\ 时, \\ pg(Kx\dot{-}1, (Lx)^2), & 此外; \end{cases}$

(4) $g(x)=\begin{cases} pg(Kx, 4Lx^2), & 当\ Lx<2^{Kx}\ 时, \\ pg(Kx\dot{-}1, Kx^2), & 当\ Lx\geqslant 2^{Kx}\ 时; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} g(0)=0; \\ g(n+1)=\min\limits_{i\to Ln} f(Kn, i)\cdot Spg(Kn, Ln+1); \end{cases}$

(6) $g(x)=E_a x$ (或 $L_a x$、$\tilde{L}_a x$、$\bar{L}_a x$).

§2 一般递归式的化归

我們先証下列定理,它为上节討論的进一步深入.

定理 1 一般递归式 $\underset{(x,y)\to(n,v)}{\mathrm{reg}}$,与{原始递归式 $\underset{(x,y)\to(n,v)}{\mathrm{rec}}$,归宿步驟式 $\underset{x\to n}{\mathrm{stp}}$}可以互相表示. 即彼此具同等力量.

証明 由上节的討論,原始递归式可用一般递归式表示,stp显然为一般递归式特例,故一般递归式絕不弱于后两算子的合并. 反之,設用一般递归式定义函数 f 如下:

$$\begin{cases} f(u,\ 0)=A(u), \\ f(u,\ Sx)=B(u,\ f(u,\ g(u,\ x+1))), \end{cases}$$

而 g 为归宿于 0 的函数,其归宿步驟为 $d(u,\ x)$ $(=\underset{t\to x}{\mathrm{stp}}\,g(u,\ t))$. 今証 f 为原始递归于 A、B、g、d 的函数,即(借助于 $x\dot{-}y$ 后)一般递归式可用原始递归式及归宿步驟式表示.

試定义(下文把 g 及 d 中的参数 u 略而不写)

$$\begin{cases} p(u,\ v,\ x,\ 0)=A(u), \\ p(u,\ v,\ x,\ k+1)=B(u,\ g^{v\dot{-}(k+1)}(x)\dot{-}1,\ p(u,\ v,\ x,\ k)). \end{cases}$$

可証:当 $k\leqslant d(x)$ 时,$f(u,\ g^{d(x)\dot{-}k}(x))=p(u,\ d(x),\ x,\ k)$.

显然,$x=0$ 时(这时 $k\leqslant d(x)=d(0)=0$, 故 k 必为 0)等式成立. 当 $x\neq 0$ 时,可用归納法来証明.

奠基: $k=0$ 时,左端 $=f(u,\ 0)=A(u)=$ 右端.

归納: 当 $x\neq 0$ 时,因 $g^{d(x)\dot{-}(k+1)}(x)$ 恒 $\neq 0$, 故得

$$\begin{aligned} & f(u,\ g^{d(x)\dot{-}(k+1)}(x)) \\ & \quad =B(u,\ g^{d(x)\dot{-}(k+1)}(x)\dot{-}1,\ f(u,\ g^{d(x)\dot{-}k}(x))) \\ & \quad =B(u,\ g^{d(x)\dot{-}(k+1)}(x)\dot{-}1,\ p(u,\ d(x),\ x,\ k)) \text{(归納假設)} \\ & \quad =p(u,\ d(x),\ x,\ k+1), \end{aligned}$$

因而,依数学归納法,本断言得証.

令 $k=d(x)$，即得

$$f(u,\ x)=p(u,\ d(x),\ x,\ d(x)).$$

显然 p 是原始递归于 A、B、g 的函数，故 f 便原始递归于 A、B、g 及 $d(x)\ (=\operatorname{stp}_{t\to x} g(u,\ t))$，从而定理得証.

利用这个結果，我們可对一般递归式作极大的化归.

定理 2 借助于函数 $x+y$、xNy 及任一組配对函数后，容許参数的一般递归式可用无参数的归宿步驟式表示.

証明 由上定理及第四章定理知道，如果可証容許参数的归宿步驟式及无参数的强复迭式可化归为无参数的归宿步驟式，本定理便得証了.

設利用无参数强复迭式由 $f(x)$ 而造 $f^n(u)$（簡記为 A）. 今可改用下法造出. 命

$$g(x)=\begin{cases} pg^30(LK^2x)f(LKx)(SLx), & \text{当 } K^3x=0 \text{ 且 } Lx<LK^2x \text{ 时},\\ pg^31(LK^2x)(LKx)0, & \text{当 } K^3x=0 \text{ 且 } Lx\geqslant LK^2x \text{ 时},\\ pg^31(LK^3x)(LKx)(SLx), & \text{当 } K^3x\neq 0 \text{ 且 } Lx<LKx \text{ 时},\\ 0, & \text{当此外情形时}. \end{cases}$$

如命 B 表示 pg^30nu0，讀者即可依次求得：$g^n(B)=pg^30nAn$，$g^{n+1}(B)=pg^31nA0$，$g^{n+1+i}(B)=pg^31nAi$，最后得 $g^{n+2+A}(B)=0$，即 $\operatorname{stp}_{x\to B} g(x)=n+2+A$，故 $f^n(u)=A=\operatorname{stp}_{x\to B} g(x)\dot{-}(n+2)$. 即无参数的强复迭式可用无参数的归宿步驟式来表示.

对容許参数的归宿步驟式說来，設欲求 $\operatorname{stp}_{t\to x} g(u,\ t)$. 試命

$$\tilde{g}(x)=pg(g(Lx,\ Kx),\ Lx)\cdot N^2g(Lx,\ Kx),$$

显然有

$$\tilde{g}^2(x)=pg(g^2_{Lx}Kx,\ Lx)\cdot N^2g^2_{Lx}Kx.$$

一般，

$$\tilde{g}^i(x)=pg(g^i_{Lx}Kx,\ Lx)\cdot N^2g^i_{Lx}Kx.$$

因此，只要把配对函数改得无零編号，那末便显有：

$$\tilde{g}^i(x)=0 \text{ 当且仅当 } g^i_{Lx}Kx=0.$$

由于对每个 u 及 x，永有 m，使 $g_u^m(x)=0$. 故知 $\tilde{g}$ 必为归宿于 0 的函数，且由上列关系还易知道：

$$\operatorname*{stp}_{t\to x} g(u,\ t) = \operatorname*{stp}_{t\to \mu g(x,u)} \tilde{g}(t).$$

由此卽知，容許参数的归宿步驟式可用无参数的归宿步驟式表示. 于是定理得証.

像原始递归式那样，对一般递归式也有种种特例. 如无参数一般递归式、强一般复迭式、弱一般复迭式、归宿步驟式等. 我們給出相应定理如下：

定理 3 一般递归函数可以用下法組成：由本原函数出发，經过有限次迭置及无参数的一般递归式而作成：

$$\begin{cases} f(u,\ 0)=u, \\ f(u,\ Sx)=B(x,\ f(u,\ g(x+1))). \end{cases}$$

証明 由这个递归式可作出 $Dx(=x\dot{-}1)$ 已在前面讲过了，有了 Dx 便可以得到无参数原始递归式. 但从本原函数出发，經过迭置及无参数原始递归式可以作出一切原始递归式. 无参数的归宿步驟式当然是无参数一般递归式的特例. 因此(有参数)原始递归式及归宿步驟式均可作出了. 由定理 2，便可得出一般递归式，从而亦得出一切一般递归函数.

定理 4 一般递归函数亦可用下法組成：由本原函数、Dx 及下列函数

$$(1)\ NE_ax,\quad (2)\ N^2E_ax,\quad (3)\ NL_ax,$$
$$(4)\ N^2L_ax,\quad (5)\ N\overline{L}_ax,\quad (6)\ N^2\overline{L}_ax$$

之一出发，經过有限次迭置及不容許参数的强一般复迭式而作成.

証明 有了 Dx 后，由强一般复迭式可得强原始复迭式. 在第四章已証明，由这六个函数之一及无参数的强原始复迭式可以作出一切原始递归函数. 根据定理 2，于是本定理得証.

定理 5 一般递归函数亦可用下法組成：由本原函数、Dx 及

下列九組函数

(甲1) $x+y$, E_ax, (甲2) $x+y$, L_ax,

(甲3) $x+y$, $\overline{L}_ax$,

(乙1) $x\dot{-}y$, NE_ax, (乙2) $x\dot{-}y$, N^2E_ax,

(乙3) $x\dot{-}y$, NL_ax, (乙4) $x\dot{-}y$, N^2L_ax,

(乙5) $x\dot{-}y$, $N\overline{L}_ax$, (乙6) $x\dot{-}y$, $N^2\overline{L}_ax$

之一出发,經过有限次迭置及无参数的弱一般复迭式而作成.

証明 有了 Dx 后,由弱一般复迭式卽可作出原始复迭式,以后的証明仿定理4.

定理6 一般递归函数亦可用如下方法而組成,卽由 $x+y$、$x\dot{-}y$、xNy、Ex 出发,經过有限次迭置及无参数的归宿步驟式而作成.

証明 有了这四个函数后,利用迭置卽可作出定理2中所列六个函数.再由定理2卽容易証得.

注意:所列四个开始函数无疑是可以大大簡化的,但到底該作怎样簡化呢?这問題很有趣味,但尙未有人加以研究.

习　題

1. 如果在定理3,4中把开始函数 Dx 删去,能否由强(弱)一般复迭式把它作出?試研究之.

2. 試証:借助于一元函数及(1,1)迭置后,有*算子 stp* 可用算子 stp 表示,故从一元函数开始,利用 stp 及(1,1)迭置可作出一元一般递归函数集.

3. 容許参数的一般递归式亦可直接用无参数的一般递归式表示如下:

設 $$\begin{cases} f(u,0)=A(u), \\ f(u,Sx)=B(u,x,f(u,g(u,Sx))). \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(0)=A(0), \\ h(Sx)=\begin{cases} A(LSx), & \text{当 } KSx=0 \text{ 时}, \\ B(Lx,Kx,A(Lx)), & \text{当 } KSx\neq 0,\ g(Lx,SKx)=0 \text{ 时}, \\ B(Lx,Kx,h(\tilde{g}Sx)), & \text{当 } KSx\cdot g(Lx,SKx)\neq 0 \text{ 时}. \end{cases} \end{cases}$$

这里 $\tilde{g}(x)$ 如定理2处所定义.求証:

$$h(x)=f(Lx, Kx) \text{ 或 } f(u, x)=h(pg(x, u)).$$

§3 一般递归式的加强

正如原始递归式那样，也有种种表面上加强的一般递归式；今就較重要的几种討論如下.

(一) 利用以任一自然数为归宿的函数

設 f 如下定义 (n_0 任意給定)：

$$\begin{cases} f(u, n_0)=A(u), \\ f(u, n)=B(u, n, f(u, g(u, n))) \quad (n\neq n_0 \text{ 时}), \end{cases}$$

其中 g 归宿于 n_0，即任給 $n\neq n_0$，恒有 m，使 $g^m(n)=n_0$. 当 $n_0\neq 0$ 时可定义 $\tilde{g}(n)$ 如下(下面把参数 u 省略不写)：

$$\tilde{g}(0)=0, \quad \tilde{g}(n_0+1)=0,$$
$$\tilde{g}(x+1)=g(x)+1 \quad (\text{当 } x\neq n_0 \text{ 时}).$$

显然，当 $g^i(n)=n_0$ 时，有

$$\tilde{g}^{i+1}(n+1)=\tilde{g}^i(\tilde{g}(n+1))=\tilde{g}^i(g(n)+1)$$
$$=\tilde{g}^{i-1}(g^2(n)+1)=\cdots=\tilde{g}(n_0+1)=0.$$

故 $\tilde{g}$ 在 Sn 处的归宿步驟比 g 在 n 处的多1. 今再定义 h 如下：

$$\begin{cases} h(u, 0)=0, \\ h(u, n+1)=\begin{cases} A(u), & \text{当 } n=n_0 \text{ 时}, \\ f(u, n)=B(u, n, f(u, g(n))), & \text{此外}, \end{cases} \end{cases}$$

这时将有

$$h(u, n+1)=B(u, n, h(u, g(n)+1))$$
$$=B(u, n, h(u, \tilde{g}(n+1))).$$

显然，可合并写成：

$$h(u, n+1)=\tilde{B}(u, n+1, h(u, \tilde{g}(n+1))).$$

这是一般递归式，并且它只使用归宿于 0 的 $\tilde{g}$. 定义 h 后，利用

$$f(u, n)=h(u, n+1),$$

卽可定义 f，这样便化归于使用归宿于 0 的函数的情形了.

(二) **使用有多个归宿的函数**

完全同上法，可化归为使用归宿于 0 的函数的递归式.

所謂有多个归宿的函数 g，指的是：对任何 x，恒有 m，使得 $g^m(x)$ 为 $a_1, \cdots, a_r$ 諸值之一. 具这性质的最小的 m 亦称为 g 在 x 处的归宿步驟.

設 $f(u, x)$ 如下定义：

$$\begin{cases} f(u, a_i) = A_i(u) & (1 \leqslant i \leqslant r), \\ f(u, x) = B(u, x, f(u, g(x)) & (x \neq a_1, \cdots, a_r). \end{cases}$$

今可定义 $\tilde{g}$ 如下：

$$\tilde{g}(0) = \tilde{g}(a_i + 1) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$\tilde{g}(x+1) = g(x) + 1 \quad (\text{当 } x \neq a_1, \cdots, a_r \text{ 时}).$$

然后，仿前討論卽得，今不贅述.

此外，还有种种推广：

(三) **联立一般递归式**

如各函数的 g 均一致，则极易化归. 如各函数用不同的归宿函数，则化归較难. 一般說来，它未必定义一般递归函数.

(四) **串值一般递归式**

这时右端出現 $f(u, g^i(Sx))$，这极易化归. 讀者可自己做出.

(五) **参数变异乃至嵌套的一般递归式**

例如下式便是参数变异的：

$$\begin{cases} f(u, 0) = A(u), \\ f(u, Sx) = B(u, x, f(w(u, x), g(x))). \end{cases}$$

如果 g 与 u 无关，则仍可仿原始递归式处那样化归. 但如果 g 与 u 有关，则所須計算的各 f 值将为：

$$f(w(u, x), g(u, x)),$$

$$f(w(w(u, x), g(u, x)), g(w(u, x), g(u, x))), \cdots$$

这里出現的是 $g(w(u, x), g(u, x))$ 而非 $g(u, g(u, x))$，因此，卽

使 $g(u, x)$ 对 x 为归宿函数，也不保証本递归式必为一般递归式（即必处处有定义）. 事实上，即使是一般递归式，也頗难化归.

（六） **多相一般递归式**

在一般递归式中如使用多个归宿函数，便叫做**多相一般递归式**. 例如（g_1、g_2 均为归宿函数）：

$$\begin{cases} f(u, 0) = A(n), \\ f(u, Sx) = B(u, x, f(u, g_1Sx), f(u, g_2Sx)). \end{cases}$$

按这个递归式而計算 f 时，将須继續計算下列各 f 值（把参数略而不写）：

$$f(g_1Sx), f(g_2Sx),$$

$$f(g_1^2Sx), f(g_1g_2Sx), f(g_2g_1Sx), f(g_2^2Sx), \cdots$$

显然，这里无法保証：当 g_1、g_2 配合使用时，各 g 值仍然归宿于 0，故上递归式亦未必是一般递归式. 至于 g_1、g_2 須满足什么条件才保証上式为一般递归式，迄今也无人研究.

多相递归式也可推广到联立、串值、参数变异、嵌套等等. 这些都是难于化归的，在此也就不細述了.

习 题

試求由下列递归式所定义的函数：

1. $$\begin{cases} f(u, x, 0) = x, \\ f(u, x, n+1) = f(u, x+1, \prod_{i \to x+1} A(u, x)) \end{cases}$$

（其中 $A(u, x)$ 为已知）.

2. $$\begin{cases} f(u, x, 0) = x, \\ f(u, x, n+1) = f(u, x+1, A(u, x+1)). \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} f(x, 0) = 1, \\ f(x, y+1) = \prod_{s \to y} A(x, s), \\ g(u+1, 0, y) = y, \\ h(x) = g(f(x, y), f(x, y+1), y). \end{cases}$$

4. $\begin{cases} f(u,\ 0)=u, \\ f(u,\ Sx)=\begin{cases} f(u,\ x+2)+1, & \text{当 } x+1 \text{ 非 } u \text{ 的方幂时}, \\ B(u), & \text{当 } x+1 \text{ 为 } u \text{ 的方幂时}. \end{cases} \end{cases}$

求 $f(2,\ x)$. 試問对一般 u 是否可以求出 $f(u,\ x)$?

5. 設 g 为归宿于 n_0 的函数,今定义

$$\tilde{g}(0)=g(n_0),$$
$$\tilde{g}(n_0)=g(0).$$

此外,

$$\tilde{g}(n)=\begin{cases} g(n), & \text{当 } g(n)\neq 0,\ n_0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } g(n)=n_0 \text{ 时}, \\ n_0, & \text{当 } g(n)=0 \text{ 时}. \end{cases}$$

求証 $\tilde{g}$ 归宿于 0,其归宿步驟与 g 归宿于 n_0 的步驟同.

6. 設 f 定义如下:

$$f(u,\ 0)=A(u),$$
$$f(u,\ n)=B(u,\ n,\ f(u,\ g(n))),\quad n\neq n_0 \text{ 时}.$$

今利用上題的 $\tilde{g}$ 而定义 $\tilde{f}$ 如下:

$$\begin{cases} \tilde{f}(u,\ 0)=A(u), \\ \tilde{f}(u,\ Sn)=\begin{cases} B(u,\ Sn,\ \tilde{f}(u,\ \tilde{g}(Sn))), & \text{当 } Sn\neq n_0 \text{ 时}, \\ B(n,\ 0,\ f(u,\ \tilde{g}(Sn))), & \text{当 } Sn=n_0 \text{ 时}. \end{cases} \end{cases}$$

求証:

$$f(u,\ n)=\begin{cases} \tilde{f}(u,\ n), & \text{当 } n\neq 0,\ n_0 \text{ 时}, \\ \tilde{f}(u,\ n_0), & \text{当 } n=0 \text{ 时}, \\ \tilde{f}(u,\ 0), & \text{当 } n=n_0 \text{ 时}. \end{cases}$$

7. 問下列的函数归宿于什么?

(1) $g(x)=E_aSx+NE_ax$,

又,将 E_a 换为 L_a、$\tilde{L}_a$、$\overline{L}_a$;

(2) $g(x)=E_aSx+N^2E_ax$,

又,将 E_a 换为 L_a、$\overline{L}_a$、$\tilde{L}_a$.

8. 将联立、串值一般递归式化归为一般递归式.

9. 对参数变异、多相乃至嵌套一般递归式,只要它們定义的函数是处处有定义的,能不能把它們化归为一般递归式?

§4 一般递归式与超穷递归式

如把整个自然数集当作依自然数的大小而排列的集, 便得一

个有次序的集．其序型記为 ω．

又，把一次及一次以下的多項式（以自然数为系数）作如下的排列：次数小的在前；次数相同的，則高次項的系数小者在前，那末亦得一个有次序的集，其序型为 ω^2：

$$3 \prec 6 \prec 9 \prec 1\cdot x+2 \prec 2x \prec 2x+4 \prec 3x \prec \cdots$$

同法，一切二次及二次以下的多項式排列起来組成 ω^3 型的有序集，n 次以下多項式組成一个 ω^{n+1} 型的多项式，而全体多項式組成一个 ω^ω 型的有序集，在这集中例如有

$$9 \prec 2x+3 \prec x^4 \prec 5x^4+3x \prec x^{17} \prec \cdots$$

这里只是限于次数为自然数的多项式．如果允許"次数"本身亦可为多項式，而把它們同法排起来，則得一个有序集，其序型为

$$\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}，通常記为 \varepsilon．$$

集合論中还討論那些比 ε 型更高型的有序集，但这种集极难于想象，这里暂止于此了．

对于二元矢量 (m, n) 的集合，如果依字典次序而排序，則这矢量集恰巧組成 ω^2 型的有序集．因为极易作对应：

$$(m, n) \longleftrightarrow mx+n.$$

这对应是保持次序的，后者旣組成 ω^2 型集，前者亦然．

同理，对于 n 元矢量集，如果依字典次序而排序，显然組成一个 ω^n 型的有序集．

不仅多元矢量集如此，甚至于可把自然数集排成各种各样序型的集，只須把大小次序适当定义便成．

例如，要把自然数集排成 ω^k 型集，可先取一一对应的配对函数組 pg、K、L，把每一自然数 n 均和 k 元矢量 $(L, LK, \cdots, LK^{k-2}, K^{k-1})$ 相对应，这显然是一一对应的．后者旣可（依字典次序）排成 ω^k 型，一一对应过去，自然数集也可排成 ω^k 型了．

要排成 ω^ω 型，可采用如下方法：$n_1 < n_2$ 当且仅当 $\mathrm{ep}_0 n_1 < \mathrm{ep}_0 n_2$，

或者有 t 使 $\mathrm{ep}_i n_1 = \mathrm{ep}_i n_2$ ($i \leqslant t$ 时) 而 $\mathrm{ep}_{t+1} n_1 < \mathrm{ep}_{t+1} n_2$. 这样的集显然可和以自然数为系数的多项式作出保持次序的一一对应. 故它显然組成 ω^ω 型集.

继續下去, 可以排成 $\omega^{\omega+1}, \cdots, \omega^{\omega^2}$ 型集; 再继續下去, 便可得 ω^{ω^ω} 型集; 再继續下去, 便得 ε 型集了(当然, 实际做时是十分困难的, 目前尚未找到簡单的作法).

凡这里的各种序型的集都叫做**良序集**. 良序集的特征性质是: 良序集的每一个非空子集均有一个**开首元素**(即最前的元素). 由此还可推得:

如果各 a_i 均为某良序集的元素, 且 a_{i+1} 必在 a_i 之前, 则 $\{a_i\}$ 只能包含有限个元素.

由于这个特点, 显然可得下列結果:

如果对某一良序集說来, 只要 x 非該集的开始元素 c, $g(x)$ 就永在 x 之前, 则对于每个 x, 必有一数 $d(x)$, 使得 $g^{d(x)}(x) = c$, 因而 $g(x)$ 必是归宿于 c 的函数.

定义 設 S 为一 α 型的良序集, 其开首元素为 c, 又設

$x \neq c$ 时, $g(x) \prec x$ ("$\prec$" 是在 S 中的"小于"关系).

則递归式(g 亦依賴于参数, 今略而不写)

$$\begin{cases} h(a_1, \cdots, a_r, c) = A(a_1, \cdots, a_r), \\ h(a_1, \cdots, a_r, x) \\ \qquad = B(a_1, \cdots, a_r, x, h(a_1, \cdots, a_r, g(x))) \quad (x \neq c \text{ 时}), \end{cases}$$

叫做**超穷递归式**, 更明确些, 可称之为 **α 型超穷递归式**.

試举一例如下. 在前述的把自然数集排成 ω^2 型的良序集中, 其次序关系可如下定义:

因

$$a、b \text{ 对应于 } (La, Ka)、(Lb, Kb),$$

故

$$a \prec b \text{ 意指:}$$

$$\begin{cases} \text{或}\ La < Lb, \\ \text{或}\ La = Lb \text{ 但 } Ka < Kb. \end{cases}$$

因此,譬如說,如选取 $pg(0, 0) = 0$, 再定义

$$g(x) = \begin{cases} pg(Kx, Lx \dot{-} 1), & \text{当某某情形时}, \\ pg(Kx \dot{-} 1, A(x)), & \text{此外}, \end{cases}$$

其中 $A(x)$ 可任意指定. 則显然有 $g(x) \prec x$, 从而 $g(x)$ 必是归宿于 0 (上良序集的开首元素)的函数.

根据这里的討論可以看到,超穷递归式为一般递归式的特例. 但反过来,亦可看到:一般递归式亦是超穷递归式的一种,的确,它是 ω 型超穷递归式的一种. 这可如下来理解:

設 $g(x)$ 为一个有归宿的函数,而且归宿于 a_0; 今把自然数集如下排序:

a_0 为开首元素(在一切元素之前).

以后的每一步驟均如下作出: 設 n_i 为未曾排次序的自然数中最小的一个,今依

$$n_i,\ g(n_i),\ g^2(n_i),\ g^3(n_i),\ \cdots$$

一直到 $g^k(n_i)$ 出現于已排序的自然数中为止;这 k 一定存在,因为无論如何,必有 k 使 $g^k(u_i) = a_0$, 而 a_0 为已排序者. 找到具这性质的最小 k 后,便可如下排序:

$$n_{i-1} \prec g^{k-1}(n_i) \prec g^{k-2}(n_i) \prec \cdots \prec g(n_i) \prec n_i,$$

以后又如此做下去,这样便把一切自然数都排序了.

显然,这个排序是 ω 型的,而且在这排序之下有 $g(x) \prec x$ (当 x 非开首元素时). 因得

定理　一般递归式可用 ω 型超穷递归式表示. 从而,对任意序数 α 說来, α 型超穷递归式恒可化归为 ω 型超穷递归式.

不过,这个排序的特征函数却不是原始递归于 g 的函数,甚至于不是多重递归于 g 的函数. 要看出这点,可引入下列函数:

$$q(x) = \underset{t}{\mathrm{rti}}\ (g^{Lt}(Kt) \dot{-} x \oplus N^2Kt \max_{u \to DKt} \max_{v \to d(u)} Ng^{d(u) \dot{-} v}(u)),$$

则显然有：在上述排序中，$x \prec y$ 当且仅当

$$\begin{cases} \text{或者 } Kq(x) < Kq(y); \\ \text{或者 } Kq(x) = Kq(y), \text{ 但 } Lq(x) > Lq(y). \end{cases}$$

如把它的特征函数表出将会用到函数 $d(x)$ 的，而 $d(x)$ 由归宿步骤式定义，故它只能是一般递归于 g 的函数而非原始递归于 g 的函数.

如果允許把一个数排在多处，则容易排出另外一个排序，仍有 $g(n+1) \prec n+1$，且該排序的特征函数为原始递归于 g 的函数.但“一数排在多处”显然是不能容許的，这点必須避免.

但是，如改用另外一个归宿函数 $\tilde{g}$，它的归宿步驟与 g 的归宿步驟有密切的关系，使得由 $\mathrm{stp}\,\tilde{g}$ 可以求出 $\mathrm{stp}\,g$，因此該新函数完全可代替旧函数 g，而对应于新函数的排序却是很簡单的排序(其特征函数非常簡单，只原始递归于 g).

新函数的定义是：

$$\tilde{g}(x) = N((x \dot{-} pg(Kx, Lx)) + \max_{i \to Lx} Ng^i(x))pg(Kx, LSx),$$

(下面幷用 U 表示 $(x \dot{-} pg(Kx, Lx)) + \max_{i \to Lx} Ng^i(x)$) 显然有 ($d(x)$ 指 g 在 x 处的归宿步驟)：

$$U(x) = 0 \text{ 当且仅当 } x \text{ 呈 } pg(i, j) \text{ 形而 } j < d(i).$$

因此，显然又有：

当 x 非 $U(x)$ 的零点时(这时或者 x 不呈 $pg(i, j)$ 形，或者虽呈 $pg(i, j)$ 形但 $j \geqslant d(i)$)，必 $\tilde{g}(x) = 0$;

当 x 为 $U(x)$ 的零点时，从而 x 呈 $pg(i, j)$ 形，$j < d(i)$，必有 $\tilde{g}(x) = pg(i, j+1)$.

今把 $U(x)$ 的零点以及呈 $pg(i, d(i))$ 形的数都标出，幷称为**特殊点**(因此，特殊点必呈 $pg(i, j)$形，而 $j \leqslant d(i)$). 把特殊点(在自然数的次序中)及直接跟随它之后的(不被别的特殊点隔开的)那些数合在一起組成一段. 如果特殊点为 a，则 a 与直接跟随在 a 之

后的数所組成的一段叫做 [a 段]. 如果 0 非特殊点，我們把在一切特殊点以前的数組成一段叫做 [0 段].

今作一排序如下:

(1) [0 段]$\prec$[$pg(0,\ d(0))$段]$\prec$[$pg(0,\ d(0)\dot{-}1)$段]$\prec\cdots$
$\prec$[$pg(0,\ 0)$段]$\prec\cdots\prec$[$pg(i,\ d(i))$段]
$\prec$[$pg(i,\ d(i)\dot{-}1)$段]$\prec\cdots\prec$[$pg(i,\ 0)$段]
$\prec$[$pg(i+1,\ d(i+1))$段]$\prec\cdots$;

(2) 在同段中則依大小排序.

可以証明下列事实:

第一，这是 ω 型的排序. 由于把各非特殊点与在它前面的特殊点組成一段，故每数均被排入，即任两数必有先后. 其次，这显然是 ω 型的排序.

第二，在这排序中必有 $\tilde{g}(n+1)\prec n+1$. 因为，設 x 非 U 的零点，則 $\tilde{g}(x)=0$，而 0 在最前；設 x 为 U 的零点，則 x 呈 $pg(i,j)$ 形，$j<d(i)$，故 x 为特殊点，这时 $\tilde{g}(x)=pg(i,\ j+1)$. 由于 $j+1\leqslant d(i)$，故 $\tilde{g}(x)$ 亦为特殊点. 由排序知 $\tilde{g}(x)\prec x$.

第三，这个排序的特征函数为原始递归于 g 的函数. 試命

$$Hz=\underset{x\to z}{\mathrm{rta}}((x\dot{-}pg(Kx,\ Lx))+(\max_{i\to DLx}Ng^{i}(Kx))\cdot N^2Lx),$$

則显然 Hx 即是 x 之前的最大特殊点，因此显然 x 在 [Hx 段]中. 根据上列的排序，显然有:

$x\prec y$ 当且仅当

或者 $Hx\neq Hy$，而 $KHx<KHy$;

或者 $Hx\neq Hy$，$KHx=KHy$，但 $LHx>LHy$;

或者 $Hx=Hy$，而 $x<y$.

即，$x\prec y$ 当且仅当 x、y 在不同段中，而 x 所在的段在 y 所在的段之前；或者 x、y 在同段中而 $x<y$.

显然，这个特征函数是原始递归于 g 的.

第四，我們还有

$$d(x) = \underset{t \to x}{\mathrm{stp}}\, g(t) = \underset{t \to pg(x,1)}{\mathrm{stp}}\, \tilde{g}(t).$$

因为 $\tilde{g}$ 在 $pg(x, 1)$ 处复迭时所得各值依次为 $pg(x,1)$, $pg(x,2)$, $\cdots$, $pg(x, d(x))$, 0, 其归宿步驟恰为 $d(x)$.

这样，我們所作的要求全部实現了.

习　题

1. 对于§1所作的递归式，如看作超穷递归式，則是什么型的？試仿本节方法将其变元排序成 ω 型.

2. §3所討論过的各种递归式，如作为超穷递归式，則是什么型的？

3. 試作一个只对一个变元递归的递归式但却是 ω^3 型的.

§5　摹状式与一般递归式

在能够与一般递归函数互相表示的算子中，以摹状式（包括求逆式）最为重要. 从本节起将詳細討論摹状式，并証明它与一般递归式可互相表示.

定理 1　借助于 $x \otimes y$ 及 $\mathrm{eq}(x, y)$，受限摹状式及初基算子可用摹状式表示.

証明　显然有：

$$\underset{x \to n}{\mathrm{rti}}\, f(x) = \underset{x}{\mathrm{rti}}\, [f(x) \otimes \mathrm{eq}(x, n)].$$

$$\underset{x \to n}{\min}\, N^2 f(x) = N^2 f(\underset{x \to n}{\mathrm{rti}}\, f(x)).$$

定理 2　設由 $f(x, y)$ 利用摹状式而构造 $g(y)$：

$$g(y) = \underset{x}{\mathrm{rti}}\, f(x, y).$$

如果 $g(y) \leqslant B(y)$，則 g 为受限摹状于 $f(x, y)$ 及 $B(y)$ 的函数.

証明　因

$$g(y) = \underset{x \to B(y)}{\mathrm{rti}}\, f(x, y),$$

由此可見，当利用摹状式而造新函数时，如果每次所得的新函数均

受界于已知函数，则摹状式根本可用受限摹状式代替．因此，要能够造出非受限摹状式所能造的函数，必須是用摹状式所造的函数不被已知函数所界．因此，表面看来，摹状式及受限摹状式的差异只有一点点，但是两者的力量却相差极大，摹状式絕不能用受限摹状式来表示．

定理 3　借助于初基函数 $x \dot{-} y$、$\left[\dfrac{x}{y}\right]$ 后，一般递归式可用摹状式及迭置来表示．

証明　借助于 $x \dot{-} y$ 后，一般递归式既可用原始递归式及归宿步驟式表示，故只須証明后两者可用摹状式来表示便成了．

設用原始递归式而定义函数 f 如下：

$$\begin{cases} f(u,\ 0)=A(u), \\ f(u,\ Sx)=B(u,\ x,\ f(u,\ x)). \end{cases}$$

由題設及定理 1 可知，一切初基函数均可作出，再由初等函数处的討論可知，若取准初基的 tm，幷命

$$G(u,\ t,\ w)=\mathrm{eq}(\mathrm{tm}(0,\ w),\ A(u))$$
$$\oplus \mathrm{eq}(t;\ \underset{i \to t}{\mathrm{rti}}\ N\mathrm{eq}(\mathrm{tm}(i+1,\ w),\ B(u,\ i,\ \mathrm{tm}(i,\ w)))),$$

(注意：$G(u,\ t,\ w)$ 可表成初基函数）再命

$$w_0=\underset{w}{\mathrm{rti}}\ G(u,\ t,\ w),$$

則有

$$f(u,\ t)=\underset{y}{\mathrm{rti}}\ \mathrm{eq}(y,\ \mathrm{tm}(t,\ w_0))$$
$$=\underset{y}{\mathrm{rti}}\ \mathrm{eq}(y,\ \mathrm{tm}(t,\ \underset{w}{\mathrm{rti}},\ G(u,\ t,\ w)))$$

故原始递归式可用摹状式而表示．在特例，如有 $f(x)$，必可用摹状式而作出 $f(x)$ 的复迭式：

$$f^t(x).$$

設有函数 $g(x)$，利用归宿步驟式而作出 $d(x)=\underset{t \to x}{\mathrm{stp}}\ g(t)$，今先利用摹状式由 $g(x)$ 而造 $g^t(x)$，然后再由摹状式而造 $d(x)=\underset{t}{\mathrm{rti}}\ g^t(x)$．故归宿步驟式亦可用摹状式来表示．定理得証．

定理 4 借助于函数 $x \dot{-} y$、xNy 后，摹状式可用容許参数的 $\underset{x\to n}{\mathrm{stp}}$ 表示，从而可用一般递归式表示.

証明 容易驗証(可有多个参数，这里只写出一个)：

$$\underset{x\to n}{\min} N^2F(u, x) = D\underset{x\to 1}{\mathrm{stp}}\{Sx\cdot N^2F(u, Dx)N(x\dot{-}Sn)\}\dot{-}n.$$

設有摹状式：$f(u)=\underset{t}{\mathrm{rti}}\, F(u,t)$. 今先利用 $\underset{x\to Dn}{\min} N$ 及函数 xNy 而造 $g(u, n)$ 如下：

$$g(u, n) = Sn\cdot N^2\underset{x\to n}{\min} N^2F(u, x).$$

由 $g(u, n)$ 的定义显見(暫把 $F(u, x)$ 的最小 x 零点記为 r)：

$$g(u, n) = \begin{cases} Sn, & \text{当 } n\leqslant r \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } n>r \text{ 时}. \end{cases}$$

故对任何 n，如果 $n>r$，則 g 在 n 处的归宿步驟为 1 (因 $g(u, n)=0$)；如果 $n\leqslant r$，則必有

$$g^i(u, n) = n+i, \quad \text{当 } n+i\leqslant Sr \text{ 时}.$$

故

$$g^{Sr-n}(u, n) = n+Sr-n = Sr.$$

从而

$$g^{r-n+2}(u, n) = g(u, Sr) = 0,$$

即 g 在 n 处的归宿步驟为 $r+1-n$. 合并这两結果，可知：无論 $n\leqslant Sr$ 或否，恒有

$$\underset{t\to n}{\mathrm{stp}}\, g(u, t) = S(Sr\dot{-}n).$$

故

$$\underset{t\to 1}{\mathrm{stp}}\, g(u, t) = Sr = Sf(u).$$

所以

$$f(u) = \underset{t}{\mathrm{rti}}\, F(u, t) = D\underset{t\to 1}{\mathrm{stp}}\, g(u, t).$$

換言之，$\underset{t}{\mathrm{rti}}$ 可用 $\{\underset{t\to n}{\mathrm{stp}}\}$ 表示.

既然 stp 为一般递归式的特例，可見摹状式亦可由一般递归式表示. 定理得証.

由定理 3 和定理 4，又得

定理 5 借助于 $x\dot{-}y$ 及 $\left[\frac{x}{y}\right]$ 后，一般递归式可用容許参数的 $\underset{x\to n}{\text{stp}}$ 表示.

注意：要想直接証明定理 5 是比較困难的.

既然摹状式与求逆式可互相表示，故以上的結果对求逆式亦适用，即以上各定理中的"摹状式"改为"求逆式"后仍是正确的.

定理 6 借助于 xNy、$\text{eq}(x, y)$ 以及配对函数組后，容許参数的 inv 可用无参数的 inv 表示. 如放弃必須使用正常摹状式的要求，則容許参数的 unv 也可用无参数的 unv 表示.

証明 如用 A 表示 $SKz\cdot N\text{eq}(f(LKz, Lz), K^2z)N\text{eq}(z, pg(Kz, Lz))$，則仿第三章的討論可知，如果 $\underset{y\to x}{\text{inv}} f(t, y)$ 为正常，則 $\underset{z\to x}{\text{inv}} A$ 亦为正常；但如果 $\underset{y\to x}{\text{unv}} f(t, y)$ 为正常，$\underset{z\to n}{\text{unv}} A$ 却未必正常（$n=0$ 时无定义，$n\neq 0$ 时則有定义）. 此外并有：

$$\underset{y\to x}{\text{inv}} f(t, y)=L\underset{z\to SB}{\text{inv}} A;\quad \underset{y\to x}{\text{unv}} f(t, y)=L\underset{z\to SB}{\text{unv}} A$$

（这里的 B 表 $Spq(x, t)$），故定理得証.

今問：无参数的、正常的 unv，其力量又如何？

設已知 $F(x)$，由 $F(x)$ 定义 $G(x)$、$H(x)$ 如下：

$$G(2x)=\begin{cases} F(x)+1, & \text{当 } F(x) \text{ 取新值时,}\\ 0, & \text{当 } F(x) \text{ 取旧值时;}\end{cases}$$

$$G(2x+1)=0.$$

显然，

$$G(x)=N\,\text{rs}(x, 2)\cdot\left(F\left[\frac{x}{2}\right]+1\right)\left(\min_{t\to x\dot{-}1} N^2(F(x)\dot{-}F(t))N^2x+Nx\right).$$

$$Hx=N^2G(x)\cdot(2G(x)\dot{-}1)+NG(x)\cdot 2\left(\sum_{i\to x} NH(i)\dot{-}1\right).$$

显然，当 $G(x)\neq 0$ 时 $Hx=2G(x)\dot{-}1$，而在 $G(x)=0$ 处，H 值則依次填以 0, 2, 4, 6, ….

并且，如果 F 在 t_0 处第一次取 x，则 G 在 $2t_0$ 处取 $x+1$（且只在此处），H 在 $2t_0$ 处取 $2x+1$（也只在此处）. 故当 $F(t)$ 取一切值时，$G(x)$ 对非 0 值取一次也只取一次，而对 0 值取无穷次. 从而 Hx 对每一值均取一次也只一次.

因此，只要对 $F(t)$ 可实施 $\underset{t\to x}{\mathrm{inv}}$，那末对 $H(t)$ 必可实施 $\underset{t\to x}{\mathrm{unv}}$，并有

$$\underset{t\to x}{\mathrm{inv}}\, F(t) = [\underset{t\to 2x+1}{\mathrm{unv}}\, H(t)/2].$$

但在作 $H(t)$ 的过程中，除用到 $\underset{x\to n}{\min} N$ 外，还用到 $\sum\limits_{x\to n} N$，因此有：

定理 7 对同为无参数的情形，如限于正常求逆式，则 inv 与 $\{\sum\limits_{x\to n} N,\ \mathrm{unv}\}$ 可以互相表示(讀者自証).

如不限于正常求逆式，而容許作出未必处处有定义的函数，则无参数的 unv 与有参数的 unv 可互相表示. 从而与 $\underset{x\to n}{\min} N$ 配合后即可表示 inv. 但是，当限于正常求逆式时，无参数的 unv 却必须与 $\sum\limits_{x\to n} N$ 配合才能表示 unv. 在这里，“正常性”的要求便起显著的作用了.

习　题

1. 試直接証明：借助于原始递归函数后，函数

$$\begin{cases} f(0, u) = u+1, \\ f(m+1, 0) = f(m, 1), \\ f(m+1, u+1) = f(m, f(m+1, u)) \end{cases}$$

可用摹状式表示.

[提示：試想象把計算 $f(m, u)$ 时所用到的一切前行值均找出来，并設为 $f(m_i, u_i)$ $(1\leqslant i\leqslant s)$，从而作出一数 $w_0 = \prod\limits_{i\to s} P_{pg(m_i, u_i)}^{f(m_i, u_i)}$，把 w_0 所应满足的条件列出，設其条件为 $A(m, u, w)$，则 $w_0 = \underset{w}{\mathrm{rti}}\, A(m, u, w)$，而 $f(m, u) = \mathrm{ep}_{pg(m, u)} w_0$.

2. 試把在計算上題中 $f(2, 13)$ 时所用的各前行 f 值一一列出，从而把 w_0 写出来.

3．如果一元函数 $H(x)$ 对 x 严格递增，且 $H(x)$ 的值域中有 n 及 $f(u, x)$ 的一切 x 零点，则对于适当的 m，下式成立：

$$\underset{x\to n}{\mathrm{rti}}\, f(u, x)=H(\underset{t\to m}{\mathrm{rti}}\, f(u, H(t))).$$

4．如果三元函数 $H(u, v, x)$ 对 x 严格递增，且其值域中有 n 及 $f(a, x)$ 的一切 x 零点，则对于适当的 m，下式成立：

$$\underset{x\to n}{\mathrm{rti}}\, f(a, x)=H(u, v, \underset{t\to m}{\mathrm{rti}}\, f(a, H(u, v, t))).$$

5．如果 $f(x)$ 严格递增，则

$$\underset{x}{\mathrm{rta}}(f(x)\dot{-}t)=\underset{x}{\mathrm{rti}}(St\dot{-}f(x+1)).$$

6．如果 $g(u_1, \cdots, u_r, t)$ 对 t 严格递增，则

$$\underset{x}{\mathrm{rti}}(Sf(u_1, \cdots, u_r)\dot{-}g(u_1, \cdots, u_r, Sx))$$
$$=\underset{x}{\mathrm{rta}}(g(u_1, \cdots, u_r, x)\dot{-} f(u_1, \cdots, u_r)),$$

这里 $\underset{x}{\mathrm{rta}}$ 表示"最大 x 零点".

7．当 $pg(x, y)$ 对 y 递增时，求証

$$\underset{y}{\mathrm{rti}} f(x, y)=L\,\underset{y}{\mathrm{rti}}[f(Ky, Ly)+(Ky\dot{-}x)].$$

§6 利用摹状式以作一般递归函数集

既然摹状式与一般递归式可互相表示，故可以只用迭置及摹状式而作出一般递归函数集.

定理 1 只須增加 $x\dot{-}y$ 及 $\left[\frac{y}{x}\right]$ 作为开始函数，那末由迭置及容許参数的摹状式即可作出一般递归函数集.

証明 根据上节定理 3 不难得証.

注意：正象"初基函数集"处的討論那样，由 $x\dot{-}y$ 及迭置即可作出 Nx、$x\oplus y$、$x\otimes y$ 及 $\mathrm{eq}(x, y)$，并有

$z=x+y$ 当且仅当 $(x\dot{-}z)\oplus(y\dot{-}z)\oplus\mathrm{eq}(z\dot{-}x, y)=0$;

$z=x\cdot y$ 当且仅当

$$(z\oplus(x\otimes y))$$
$$\otimes\left(Nx\oplus Ny\oplus Nz\oplus\mathrm{eq}\left(\left[\frac{z}{x}\right],y\right)\oplus\mathrm{eq}\left(\left[\frac{z\dot{-}1}{x}\right],\ y\dot{-}1\right)\right)=0.$$

設其左端分别記为 A 及 B, 則有

$$x+y=\underset{z}{\mathrm{rti}}\,A;$$

$$x\cdot y=\underset{z}{\mathrm{rti}}\,B.$$

因此，只要允許使用容許参数的摹状式，則开始函数 $x+y$ 恒可代以 $x\dot{-}y$，开始函数 $x\cdot y$ 恒可代以 $x\dot{-}y$ 及 $\left[\dfrac{x}{y}\right]$.关于这一点，下文便不再一一注出了．例如，下面的定理 2、3 中的 $x+y$ 均可改为 $x\dot{-}y$．通常均慣以 $x+y$、$x\cdot y$ 作为开始函数，因此下定理便值得重視．

定理 2 如添入开始函数 $x+y$、$x\cdot y$ 及 $\mathrm{eq}(x, y)$，則由迭置及容許参数的摹状式即可作出一般递归函数集．

証明 依照定理1,只須証明可以作出函数 $x\dot{-}y$、$\left[\dfrac{x}{y}\right]$ 便够了．

有了 $x\cdot y$ 及 $\mathrm{eq}(x, y)$，即可表示受限摹状式：

$$\underset{x\to y}{\mathrm{rti}}\,f(u, x)=\underset{x}{\mathrm{rti}}(f(u, x)\cdot\mathrm{eq}(x, y)).$$

下面只使用受限摹状式而定义 $x\dot{-}y$ 及 $\left[\dfrac{x}{y}\right]$:

(1) $N^2x=\underset{t\to 1}{\mathrm{rti}}\,\mathrm{eq}(x\cdot t, x)$,

(2) $x\ddot{-}y=\underset{t\to x+y}{\mathrm{rti}}\,\mathrm{eq}(t^2+4x\cdot y, (x+y)^2)$,

(3) $Nx=1\ddot{-}N^2x$,

*(4) $x\dot{-}y=(x\ddot{-}y)\cdot N^2(y\ddot{-}x+x\ddot{-}y)$,

*(5) $\left[\dfrac{x}{y}\right]=\underset{t\to x}{\mathrm{rti}}\,(Sx\cdot N^2y\ddot{-}St\cdot y)$,

这样，定理便得到了証明．

注意：比較一下定理 1 和定理 2 可以看出，对摹状式說来，使用加法与乘法，或使用减法与除法，其力量基本上是相同的，不过使用加法与乘法时須依靠 $\mathrm{eq}(x, y)$的帮助．

推論 如果把定理 2 中的开始函数改为 $x+y$、x^2 及 $\mathrm{eq}(x,y)$，那末也有同样的結果．

証明 这时有 $x \cdot y = \underset{t}{\mathrm{rti}}\, \mathrm{eq}(x^2+y^2+t+t, (x+y)^2)$.

定理 3 任意添入下列一組函数,則由迭置及容許参数的羃状式卽可作出一般递归函数集:

(1) $x+y$, $NE_a x$; (2) $x+y$, $N^2E_a x$;

(3) $x+y$, $NL_a x$; (4) $x+y$, $N^2L_a x$;

(5) $x+y$, $N\overline{L}_a x$; (6) $x+y$, $N^2\overline{L}_a x$.

証明 根据定理 2, 只須証明:从它們可以作出 $x+y$、$x \cdot y$ 及 $\mathrm{eq}(x, y)$ 便够了.

首先,依以前的結果可知,由其中之任一組均可作出:

(1) NE_aSx;

(2) Nx;

(3) $R_a x = \underset{w}{\mathrm{rti}}\, N^2E_aS(x+Sa \cdot w)$

(当 x 为 T_a 数时,此外情形之值可不管).

其次,依照 Euler 断言:不可能有四平方数組成等差級数;因此卽可推出不可能有四个不同的 T_a 数組成等差級数(如果四个不同 T_a 数 y_1、y_2、y_3、y_4 組成等差級数,則 $8Sa \cdot y_i + (a \dot{-} 1)^2$ 便是四个不同的平方数,且組成等差級数),故得(暫用 $\bar{a}$ 表 Sa):

$$
\begin{aligned}
(4)\quad T_a x + \bar{a}x = \underset{w}{\mathrm{rti}}\, (&N^2E_aSw + N^2E_aS(Sw + 3\bar{a}R_aSw + \bar{a}Sx \\
&+ 6\bar{a} + 3) + N^2E_aS(Sw + 2\bar{a}R_aSw + 2\bar{a}Sx \\
&+ 6\bar{a} + 3) + N^2E_aS(Sw + \bar{a}R_aSw + 3\bar{a}Sx \\
&+ 6\bar{a} + 3) + N^2E_aS(Sw + 4\bar{a}Sx + 6\bar{a} + 3))
\end{aligned}
$$

(由于后面四个 T_a 数組成等差級数,故其公差必为 0,卽必須 $R_aSw = Sx$;又因 Sw 为 T_a 数,故必 $Sw = T_aSx$,卽 $w = T_a x + \bar{a}x$);

$$
\begin{aligned}
(5)\quad x - y = \underset{w}{\mathrm{rti}}\, N^2E_aS(&T_a(x+y) + Sa \cdot (x+y) \\
&+ a \cdot x + (a+2)y + a + 2 + w)
\end{aligned}
$$

(当 $x \geqslant y$ 时,此外情形可不管其值);

(6) $\left[\dfrac{x}{c}\right] = \underset{y}{\mathrm{rti}}\, (cSy - Sx + Sx - cSy)$ (c 为固定数)

(这表示 $Sx \leqslant cSy$ 的最小 y 根);

*(7) $x \cdot y = \left[\dfrac{T_a(x+y) - T_a x - T_a y}{Sa} \right]$;

*(8) $\mathrm{eq}(x, y) = N^2((x-y) + (y-x))$.

$x+y$、$x \cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$ 既已作出,定理于是得証.

以上是使用容許参数的摹状式的. 如果加强一些使用容許参数的求逆式,由于

$$x \dot{-} y = \operatorname*{inv}_{t \to (x+y)^2} (4xy + t^2)$$

(从而容易作出 eq),故上文中需用 eq 为开始函数的均可取消.除此之外,能否再有别的化簡呢? 对此迄今尚无人加以研究.

如使用无参数的求逆式,便将有下述定理.

定理 4 只須增加下列两組函数:

(1) $x+y$, $E_a x$; (2) $x+y$, $\overline{L}_a x$

之一作为开始函数,那末由迭置及 $\operatorname*{inv}_{x \to n}$ 即可作出一般递归函数集.

証明 只須証明,可作出 $x \cdot Ny$、$\mathrm{eq}(x, y)$、$x+y$、$NE_a x$ (或 $N\overline{L}_a x$) 及对 y 递增的配对函数組便成了. 因为,这样既可作出容許参数的摹状式,又可由这种摹状式而作出一般递归式.

对 (1) 組說来,可如下作出:

*(1) $x+y$;

(2) $E_a x$;

(3) $T_a\left[\dfrac{x+a}{Sa}\right] + x = \operatorname*{inv}_{t \to x} E_a t$;

(4) $T_a x + ax = \operatorname*{inv}_{t \to ax} E_a t$;

(5) $x - y = E_a[T_a(x+y) + Sa \cdot (x+y) + (a+2)x + a \cdot y + a + 2]$,

(当 $x \geqslant y$ 时,此外情形可不考虑);

(6) $T_a x = \operatorname*{inv}_{t \to ax} E_a t - a \cdot x$;

(7) $Nx = 1 - E_a(T_a x + 1)$;

(8) $Dx = x - N^2x$;

(9) $\mathrm{rs}(x+a,\ Sa) = E_a(Sa + \operatorname*{inv}_{t\to x} E_a t)$;

(10) $\left[\dfrac{x}{Sa}\right] = E_a \operatorname*{inv}_{t\to x} [SaE_a t + \mathrm{rs}(t+a,\ Sa)]$;

(11) $x \cdot y = \left[\dfrac{T_a(x+y) - T_a x - T_a y}{Sa}\right]$;

(12) $R_a x = \left[\dfrac{E_a D(x - E_a x)}{Sa}\right] + N^2 x$;

*(13) $\mathrm{eq}(x,\ y) = N^2((x-y) \dot{+} (y-x))$;

*(14) $xNy = x \cdot Ny$;

*(15) $NE_a x$, 由(2)、(7)迭置;

*(16) $pg_a(x,\ y) = T_a(x+y) + x$;

*(17) $K_a x = x \dot{-} T_a R_a x$;

*(18) $L_a x = R_a x \dot{-} K_a x$.

对 (2) 組說来,可如下作出:

*(1) $x+y$;

(2) $\overline{L}_a x$;

(3) $T_a x = \operatorname*{inv}_{t\to x} \overline{L}_a t$;

(4) $Nx = \overline{L}_a(\operatorname*{inv}_{t\to x} \overline{L}_a St)$;

(5) $x - y = \overline{L}_a(T_a(2x+y) + Sa(x+2y))$

($x \geqslant y$ 时,此外情形不管其值);

(6) $R_a x = \overline{L}_a(x + Sa(\overline{L}_a x + 1) + 1)$;

(7) $x \dot{-} \left[\dfrac{x+a}{Sa}\right] = \overline{L}_a(T_a x + x)$;

(8) $\left[\dfrac{x+a}{Sa}\right] = x \dot{-} \left(x \dot{-} \left[\dfrac{x+a}{Sa}\right]\right)$;

(9) $x \cdot y = \left[\dfrac{T_a(x+y) - T_a x - T_a y + a}{Sa}\right]$;

*(13) $\mathrm{eq}(x,\ y) = N^2((x-y) + (y-x))$;

*(14) 同前;

*(15) $N\overline{L}_a x$, 由(2)、(4)迭置;

*(16) ~ (18) 同前.

于是定理得証.

习 题

1. 求出下列的递归函数. 在下列各题中,均可将“E_a”换为 L_a、$\overline{L}_a$、$\widetilde{L}_a$,从而得出三組新的习题.

(1) $E_a^{-1}x$, $(E_aS)^{-1}x$,

从而求出 $E_a(a+E_a^{-1}x)$, $E_a(x+E_a^{-1}x)$, $E_a(u+E_a^{-1}x)$,

$E_aSE_a^{-1}x$, $E_a(E_aS)^{-1}x$;

(2) $(E_a\cdot E_a+L_a)^{-1}x$, 驗証有:

$$L_0(E_0\cdot E_0+L_0)^{-1}x=E_1x;$$

(3) $(E_a(I+R_a))^{-1}x$ (先求 E_a 改为 L_a 的情形);

(4) $(E_a(I+2R_a))^{-1}x$ (先求 E_a 改为 L_a 的情形);

(5) $(aT_aR_a \dot{-} I)^{-1}x$;

(6) $(I \dot{-} bE_a)^{-1}x$ (研究 $b\geqslant 4$ 及 $b<4$ 的情形);

(7) $(E_a+E_aS)^{-1}x$, 又求 $E_a(E_a+E_aS)^{-1}x$ 之值;

(8) $(E_a\cdot N(L_a \ddot{-} E_a\cdot E_a))^{-1}x$;

(9) $(E_a(I+b))^{-1}x$, 又求 $N^2E_aS(E_a(I+b))^{-1}x$;

(10) $(NE_aS)^{-1}x$, 又求 $NE_a(NE_aS)^{-1}NE_ax$;

(11) $(N^2E_aS)^{-1}x$, 又求 $N^2E_a(N^2E_aS)^{-1}N^2E_ax$;

(12) $(E_a+E_aS+E_aS^2+\cdots+E_aS^{a-1})^{-1}x$;

(13) $(aE_a+E_a(a+E_a^{-1}))^{-1}x$.

2. 問在什么条件下有 $(AB)^{-1}x=B^{-1}A^{-1}x$?

3. 求証:

(1) $\underset{y}{\mathrm{rtu}}\, f(t, y)=L \underset{z\to St}{\mathrm{unv}} (SKz\cdot Nf(Kz, Lz)\cdot N(z \ddot{-} pg(Kz, Lz)))$;

(2) $\underset{z}{\mathrm{rti}}(f(Kz, Lz)+(Kz \ddot{-} x))=\underset{z\to x}{\mathrm{inv}}(Kz\cdot Nf(Kz,Lz))$ (当 $x\neq 0$ 时).

4. 設 $f(x)$ 取值一切数(但每值可取多次),試定义

$$f_1(x)=\mathrm{rs}(x, 2)\cdot\min_{i\to Dx} N^2(f(i) \ddot{-} f(x))\cdot Sf(x),$$

$$f_2(x)=N^2f_1(x)\cdot 2Df_1(x)+Nf_1(x)(2\sum_{i\to x}f_1(i) \dot{-} 1);$$

求 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 的值的规律,并求証

$$\underset{t\to x}{\mathrm{inv}}\, f(t)=\underset{t\to Sx}{\mathrm{inv}}\, f_1(t)=\underset{t\to 2x}{\mathrm{unv}}\, f_2(t).$$

5．求証：

(1) 当 f 为一元函数时，設用 f° 表示 $pq(fK, L)$，则当 pg 递增时有 $(f^{-1})^{\circ}=(f^{\circ})^{-1}$；又，在証明中需不需要假定 pg 的一一对应性？

(2) 当 f 为一元函数时，設用 f^0 表 $pg(I, fL)$，则

$$(f^{-1})^0=\underset{z\to Sx}{\text{inv}}\,[N^2(Kf^0\dot{-}KL)\cdot SL](z);$$

又，在証明中要不要 pg 从 0 編号起且 K、L 具平梯性？

6．由上题容易推得：有 * 算子 inv* 可用算子 inv 表示．故由适当的一元函数开始，只用 inv 及(1, 1)迭置即可作出一元一般递归函数集．試作出之．

7．能否由有限个开始函数、迭置及 $\underset{y}{\text{rtu}}$ 而作出一般递归函数集？为什么？

§7　一般递归函数的典范式

如果尽量多地使用初基算子（或原始递归式等），而尽量少用摹状式或一般递归式，充分貫徹这种原則下去，那末化归中至少要用多少次摹状式或一般递归式呢？回答是：只用一次便够了．

定理 1　每一个一般递归函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 均可表成

$$f(x_1, \cdots, x_r)=A\,\underset{y}{\text{rtu}}\,B(x_1, \cdots, x_r, y)$$

之形，这里的 $B(x_1, \cdots, x_r, y)$ 是滿足存在唯一性条件的初基函数，而 $A(x)$ 为受界于 Ix 的准初基函数（即 $y=A(x)$ 为初基謂詞，这时 $A(x)$ 也必为零級副初等于 $x\dot{-}y$、$\left[\frac{x}{y}\right]$ 的函数）．

即任一个一般递归函数可表为准初基函数的迭置，而外函数（見緒論 §4）受界于 Ix．

証明　由上节定理 4 可知，函数 f 可由 $x+y$、Ex 出发，經过有限次迭置与无参数的求逆式而得．易知：

$$z=x+y \text{ 与 } z=Ex$$

的特征函数都是初基函数，設記其为 $G(x, y, z)$ 及 $H(x, z)$，则显然滿足：

$$Ex=\underset{z}{\text{rtu}}\,H(x, z);\quad x+y=\underset{z}{\text{rtu}}\,G(x, y, z).$$

現在再討論迭置与无参数的求逆算子.

設

$$f(x)=A\,\underset{y}{\mathrm{rtu}}\,[B(x,\ y)],$$

$$g(x)=C\,\underset{y}{\mathrm{rtu}}\,[D(x,\ y)],$$

其中 A、B、C、D 均为合乎要求的函数. 今証 $f(g(x))$ 也可表成同样的形状. 事实上,

$$f(g(x))=A\,\underset{z}{\mathrm{rtu}}\,[B(g(x),\ z)]$$

$$=A\,\underset{z}{\mathrm{rtu}}\,[B(C\,\underset{y}{\mathrm{rtu}}\,(D(x,\ y)),\ z)].$$

命 $B(CKw,\ Lw)\oplus D(x,\ Kw)=0$ 的任一根 (其根未必唯一) 为 w_0, 由于方程 $D(x,y)=0$ 只有一根 y_0, 故必 $Kw_0=y_0$; 又由于 w_0 满足 $B(Cy_0,\ Lw_0)=0$, 故 $Lw_0=z_0$; 再設 K、L 为一一对应, 这便唯一地决定 w_0. 足見这个根是唯一的. 因而得

$$f(g(x))=AL\,\underset{w}{\mathrm{rtu}}\,[B(CKw,\ Lw)\oplus D(x,\ Kw)].$$

这里 AL 为受界于 I 的准初基函数, 括号內可表为初基函数, 故知 $f(g(x))$ 可写成要求的形状.

其次, 設

$$f(x)=A\,\underset{y}{\mathrm{rtu}}\,[B(x,\ y)],$$

而

$$g(x)=\underset{t\to x}{\mathrm{inv}}\,f(t),$$

則有 (下面取准初基的 tm 函数):

$$g(x)=\underset{t}{\mathrm{rti}}[f(t)\dot{-}x]$$

$$=\underset{t}{\mathrm{rti}}[A\,\underset{y}{\mathrm{rtu}}\,B(t,\ y)\dot{-}x]$$

$$=\underset{t}{\mathrm{rti}}[(A(y)\dot{-}x)+B(t,\ y)]$$

$$=\underset{t}{\mathrm{rtu}}[(Ay_t\dot{-}x)+B(t,\ y_t)+N^2(t)\cdot N\min_{s\to Dt}(Ay_s\dot{-}x)$$

$$+\max_{s\to Dt}B(s,\ y_s)]$$

$$=\underset{t}{\mathrm{rtu}}[A\,\mathrm{tm}(t,\ w)\dot{-}x)+B(t,\ \mathrm{tm}(t,\ w))$$

$$+N^2(t)N\min_{s\to t\dot-1}(A\,\mathrm{tm}(s,w)\dot-x)$$
$$+\max_{s\to t\dot-1}B(s,\mathrm{tm}(s,w))]$$
$$=K\,\mathrm{rti}_v[A\,\mathrm{tm}(Kv,Lv)\dot-x)+B(Kv,\mathrm{tm}(Kv,Lv))$$
$$+N^2(Kv)\cdot N(\min_{s\to Kv\dot-1}(A\,\mathrm{tm}(s,Lv)\dot-x)$$
$$+\max_{s\to DKv}B(s,\mathrm{tm}(s,Lv))].$$

再把 rti_v 化为 rtu_v，故知 $g(x)$ 亦可表成要求的形状. 依数学归納法，定理得証.

还可以有另一典范形(但不及上形之佳).

定理 2　对于任意一般递归函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$，恒可找出两个初基函数 B_1、B_2，使得($x-y$ 为任一差函数)

$$f(x_1,\cdots,x_r)=\mathrm{rti}_y B_1(x_1,\cdots,x_r,y)-\mathrm{rti}_y B_2(x_1,\cdots,x_r,y).$$

証明　設 f 表成 $A\,\mathrm{rti}_y B(x_1,\cdots,x_r,y)$ 形. 将 A 表成两个前进函数之差 A_1-A_2. 例如表成

$$(Ax+Ix)-Ix.$$

則由定理 1 及第三章 §5 定理 7 便得

$$f(x_1,\cdots,x_r)=A_1\,\mathrm{rti}_y B(x_1,\cdots,x_r,y)-A_2\,\mathrm{rti}_y B(x_1,\cdots,x_r,y)$$
$$=\mathrm{rti}_y B_1(x_1,\cdots,x_r,y)-\mathrm{rti}_y B_2(x_1,\cdots,x_r,y).$$

定理得証.

根据定理 1，我們引入带头函数的概念.

定义　如果一元函数 K 具下列性质：任給一个 r 元的一般递归函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$，恒可找出一个 $r+1$ 元的 S 集函数 $B(x_1,\cdots,x_r,y)$，使得

$$f(x_1,\cdots,x_r)=K\,\mathrm{rti}_y B(x_1,\cdots,x_r,y),$$

則 K 称为(表示一般递归函数时的) S 集的 ***r* 带头函数**(也称为**通用函数**). 因为这里只討論对一般递归函数的表示，故“表示一般

递归函数时的”这几字是常被省略的.

显然，如果 S_1 集为 S_2 集的子集，则 S_1 集的 r 带头函数也必是 S_2 集的 r 带头函数.

关于带头函数有如下一些定理.

定理 3 如果 S 集以初基函数集为其子集，且对迭置封閉；那末对于任意一对配对左右函数 K、L 以及任意的 r 說来，只要K 及 L 为准 S 集函数，且受界于 S 集中的某一函数，则 K 及 L 都是 S 集的 r 带头函数.

証明 任給一个 r 元一般递归函数，根据定理 1 可知，存在初基函数 B 及准初基函数(且受界于初基函数 Ix) Ax，使得

$$f(x_1, \cdots, x_r) = A \operatorname*{rtu}_y B(x_1, \cdots, x_r, y).$$

設記 $\operatorname*{rtu}_y B(x_1, \cdots, x_r, y)$ 为 t_0，又把

$$B(x_1, \cdots, x_r, Ly) \oplus \mathrm{eq}(Ky, ALy)$$

的任一 y 零点記为 y_0；则由于 y_0 使第一項为零得 $Ly_0 = t_0$(因 B 只有唯一的 y 零点)，再由于第二項为零得

$$Ky_0 = ALy_0 = At_0 = f(x_1, \cdots, x_r).$$

故得：

$$f(x_1, \cdots, x_r) = K \operatorname*{rti}_y [B(x_1, \cdots, x_r, Ly) \oplus \mathrm{eq}(Ky, ALy)].$$

因 S 集以初基函数集为子集且对迭置封閉，又因 K 及 L 均为准 S 集函数且受界于 S 集中某一函数，故极易把右端方括号內的函数表成 S 集函数(讀者試自行具体作出之). 因此，K 便是 S 集的 r 带头函数了. 同法可証 L 也是 S 集的 r 带头函数. 定理得証.

因为下列三对配对左、右函数組：

$$(E_a, L_a); \ (E_a, \overline{L}_a); \ (E_a, \widetilde{L}_a)$$

都是准初基函数且均受界于初基函数 Ix，因此可知：

推論 1 对于任意的 r 說来，E_a、L_a、$\overline{L}_a$、$\widetilde{L}_a$ 都是初基函数集的 r 带头函数；从而，也都是各級初等函数集、原始递归函数集、多

重递归函数集等等的 r 带头函数.

由于 E_a、L_a、$\bar{L}_a$、$\tilde{L}_a$ 等既可作很多函数集的带头函数，而其本身又是相当簡单的函数(它們为准初基函数,又为五則函数),因此我們便固定其中之一(例如,固定 E_1)用作带头函数,幷記为 K.如无特别声明,以后凡提到带头函数便是指这函数.

推論 2　如果 S 集除具定理 3 的有关条件外，还对算子 $\sum\limits_{x\to n} N$ 封閉，那末当准 S 集函数 Kx 为配对左函数且受界于 S 集的函数时，Kx 便是 S 集的 r 带头函数.

証明　既知 Kx 为配对左函数,可取

$$Lx = D\sum_{i\to x} N\mathrm{eq}(Ki,\ Kx)$$

为相应的配对右函数. 設 Kx 受界于 $\varphi(x)$ (S 集的函数)，則

$$Lx = D\sum_{i\to x} N \min_{y\to\varphi(x)} N^2(\mathrm{eq}(y,\ Kx)\oplus \mathrm{eq}(y,\ Ki)).$$

由于 S 集对 $\sum\limits_{i\to x} N$ 封閉，故 Lx 为 S 集的函数，它显然受界于 Ix，所以 Kx 及 Lx 滿足定理 3 的要求,这就証得了 Kx 是 S 集的 r 带头函数(对任意 r).

以上只討論了作为带头函数的充分条件，至于必要条件則有如下結論.

定理 4　如果 S 函数集以初基函数集为其子集,且对迭置及受限摹状式 $\mathop{\mathrm{rti}}\limits_{x\to n}$ 封閉；若 r 元准 S 函数集幷未穷尽 r 元一般递归函数，則当准 S 函数 Kx 为 S 集的 r 带头函数时，Kx 必为配对左函数.

証明　設 Kx 非配对左函数,它不能对每个值均取无穷多次；如果 Kx 对值 b 只取有限多次,因而存在一数 a，使得

$$\text{当 } x\geqslant a \text{ 时，}\quad Kx \text{ 永不等于 } b.$$

r 元准 S 函数集既未穷尽 r 元一般递归函数，故存在一函数 $h(x_1,\ \cdots,\ x_r)$，它为一般递归函数但非准 S 函数，从而 $N^2h(x_1,\ \cdots,\ x_r)$ 为一般递归函数而非 S 集的函数.

因为 Kx 为 S 集的 r 带头函数，注意到 $N^2h(x_1, \cdots, x_r)+b$ 当然是一般递归的，故存在 S 集的函数 $B(x_1, \cdots, x_r, y)$，使得

$$N^2h(x_1, \cdots, x_r)+b=K \underset{y}{\text{rti}} B(x_1, \cdots, x_r, y).$$

这时有：

$$\begin{aligned} N^2h(x_1, \cdots, x_r)=0 \quad &\text{当且仅当} \quad N^2h(x_1, \cdots, x_r)+b=b, \\ &\text{又当且仅当} \quad K \underset{y}{\text{rti}} B(x_1, \cdots, x_r, y)=b, \\ &\text{又当且仅当} \quad K \underset{y\to a}{\text{rti}} B(x_1, \cdots, x_r, y)=b \end{aligned}$$

(最后一点是因为等式左端的 y 零点显然不会大于 a)．又注意到 $N^2h(x_1, \cdots, x_r)$ 只取 0、1 两值，故易得

$$N^2h(x_1, \cdots, x_r)=\text{eq}(b, K \underset{y\to a}{\text{rti}} B(x_1, \cdots, x_r, y)).$$

上式的右端极易表成 S 集的函数；但是，上面曾得 $N^2h(x_1, \cdots, x_r)$ 非 S 集的函数，这就引出了矛盾．故知，Kx 必为配对左函数，定理得証．

定理 5 (M. M. Марков 定理的推广)　如果 S 集满足条件：

(1) S 集包含初基函数为其子集；

(2) S 集对迭置、受限摹状式及 $\sum\limits_{i\to x} N$ 均封閉；

(3) r 元准 S 集函数不穷尽 r 元一般递归函数，

則准 S 集函数 Kx 为 S 集的 r 带头函数当且仅当 Kx 为配对左函数．

各級初等函数集、原始递归函数集、乃至多重递归函数集等都满足本定理的条件(要証它們满足条件(3)，須使用到枚举函数，这将在下章予以討論，見第六章 §2 定理 4 及定理 6)．因此，在特例便有下述推論 (M. M. Марков 定理)．

推論　原始递归函数 Kx 可作原始递归函数集的 r 带头函数，当且仅当它对每个值均取无穷多次(从而，当且仅当它为配对左函数)．

由下章还可看出，当 S 集为初基函数集，乃至多重递归函数集

时，准 S 集与一般递归函数集是不同的，但由准初基的 E 与适当的准初基的 $\underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(x_1, \cdots, x_r, y)$ 作迭置时，却能作出任一 r 元一般递归函数来，这就明确地表明：对上面的 S 集說来，准 S 函数集对迭置是不封閉的.

根据这里的討論，可把一般递归函数分成三类：

第一，S 函数(S 表示初基函数集乃至多重递归函数集)，

第二，准 S 函数但非 S 函数，

第三，非准 S 函数.

这三类函数必然存在. 任取一个非初基（非原始递归的）、只取値 0、1 的一般递归函数，将它表成 $A\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(x_1, \cdots, x_r, y)$ 形，这时函数 $B(x_1, \cdots, x_r, y)$ 属于第一类函数，$\underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(x_1, \cdots, x_r, y)$ 便属于第二类函数，而 $A\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(x_1, \cdots, x_r, y)$ 便属于第三类函数了.

由定理 5 及其推論，还可推出下定理.

定理 6 如果任选 E_a、L_a 等之一作为带头函数，并記之为 K，則任一 r 元一般递归函数 f 均可表成形如

$$f(x_1, \cdots, x_r) = K\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(x_1, \cdots, x_r, y)$$

的典范形，其中 B 为初基函数（自然，更是初等函数，原始递归函数，等等）.

这里須注意的是：这典范形中的带头函数 K 是固定的，不随变元个数 r 及函数 f 而更改.

現在再轉到：使用于一般递归式的次数的化归方面.

定理 7 如上选定带头函数 K 后，每一个 r 元一般递归函数 f 均可表成下形中的每一形：

(1) $f(x_1, \cdots, x_r) = K\,\underset{y\to 1}{\mathrm{stp}}\, g(x_1, \cdots, x_r, y)$；

(2) $f(x_1, \cdots, x_r)$

$$= \underset{(x,y)\to(0,1)}{\mathrm{reg}} \{\tilde{g}(x_1, \cdots, x_r, x),\ B(x_1, \cdots, x_r, x, y)\}.$$

这里，g 及 $\tilde{g}$ 为归宿于 0 的初基函数；而 B 則为初基于 $x+y$、Kx

的函数.

証明 根据定理 1, 每一个 r 元一般递归函数 f 均可表成(其中取 $\widetilde{K}=KS$):

$$f(x_1, \cdots, x_r)=\widetilde{K}\ \underset{y}{\mathrm{rti}}\ A(x_1, \cdots, x_r, y),$$

其中 A 为初基函数. 由以前所証得的結果可知,若命

$$g(x_1, \cdots, x_r, y)=Sy\cdot N^2 \min_{x\to Dy} N^2A(x_1, \cdots, x_r, x),$$

則有: g 初基于 A 且

$$\underset{y}{\mathrm{rti}}\ A(x_1, \cdots, x_r, y)=D\ \underset{y\to 1}{\mathrm{stp}}\ g(x_1, \cdots, x_r, y).$$

故有

$$f(x_1, \cdots, x_r)=KSD\ \underset{y\to 1}{\mathrm{stp}}\ g(x_1, \cdots, x_r, y).$$

由于 $\underset{y\to 1}{\mathrm{stp}}$ 永不为 0, 故 $SD\,\mathrm{stp}=\mathrm{stp}$, 从而第一形成立.

要証第二形, 可命

$$h(x_1, \cdots, x_r, 0)=0,$$

$$h(x_1, \cdots, x_r, Sn)=\begin{cases} h(x_1, \cdots, x_r, SSn), \\ \qquad\qquad \text{当} \min\limits_{x\to n} N^2A(x_1, \cdots, x_r, x)\neq 0, \\ K(n), \quad \text{当 } A(x_1, \cdots, x_r, n)=0 \text{ 且} \\ \qquad N^2n\cdot N\min\limits_{x\to Dn} N^2A(x_1, \cdots, x_r, x)=0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{此外}. \end{cases}$$

若命

$$U(n+1)=N\min_{x\to n} N^2A(x_1, \cdots, x_r, x),$$

$$V(n)=A(x_1, \cdots, x_r, n)\oplus N^2n\dot{-}N\min_{x\to Dn} N^2A(x_1, \cdots, x_r, x),$$

則上式可写为:

$$\begin{aligned} &h(x_1, \cdots, x_r, Sn) \\ &\qquad =h(x_1, \cdots, x_r, SSn\cdot NU(Sn))+K(n)NV(n). \end{aligned}$$

这里 $SSn\cdot NU(Sn)$ 为初基于 A 的函数. 如果 $A(x_1, \cdots, x_r, y)$ 的最小 y 零点为 q, 則(参数不写出):

$$h(1)=h(2)=\cdots=h(1+q)=K(q)=f(x_1,\ \cdots,\ x_r),$$

即

$$f(x_1,\cdots,\ x_r)=h(1)=\underset{(x,y)\to(0,1)}{\mathrm{reg}}\{SxNU(x),\ K(x)NV(x)+y\}.$$

故第二形也得証．于是定理証毕．

由上面的討論可見，如使用 stp 則 K 决不能省．同时又可看出，如使用 reg，則 K 竟可省去，而改用 Ix 作带头函数．但須注意，为了省去 K 却需引用强有力得多的算子 reg；其次，其中的 B 不能是初基函数（这是第一形使用的）而只能是初基于 $x+y$、Kx 的函数．

函数 f 的变元 $x_1,\ \cdots,\ x_r$ 均作为 rti、stp、reg 的参数而出現，对 rti 說来，这是不能避免的．对 stp 及 reg 說来，能否使其中某些变元是 stp 或 reg 的新添变元呢？下定理給出否定的回答．

定理 8　并非每一个一般递归函数 $f(a_1,\ \cdots,\ a_r)$ 均可表成下形：

$$f(a_1,\ \cdots,\ a_r)=Ah(a_1,\ \cdots,\ a_r);$$

其中 A 为原始递归函数（甚至于是多重递归函数），而 h 由下形递归式定义：

$$\begin{cases} h(a_1,\ \cdots,\ a_{r-1},\ 0)=A_1(a_1,\ \cdots,\ a_{r-1}), \\ h(a_1,\ \cdots,\ a_{r-1},\ Sa_r) \\ \qquad =A_2(a_1,\cdots,a_r,h(a_1,\cdots,a_{r-1},g(a_1,\cdots,a_{r-1},Sa_r))). \end{cases}$$

这里 A_1、A_2 及 g 为原始递归函数（甚至多重递归函数）．换言之，并非每个一般递归函数 f 均能表成下形（A、A_1、A_2、g 同上）：

$$A\underset{(x,y)\to(A_1,a_r)}{\mathrm{reg}}\{g(a_1,\ \cdots,\ a_{r-1},\ x),\ A_2(a_1,\ \cdots,\ a_{r-1},\ x,\ y)\}.$$

証明　存在有非原始递归函数（甚至于非多重递归函数），任取其一設为 $k(x)$．当 $r>1$ 时，若取 $f(a_1,\ \cdots,\ a_r)=k(a_1)+\cdots+k(a_r)$，可証 $f(a_1,\ \cdots,\ a_r)$ 不能表成 $Ah(a_1,\ \cdots,\ a_r)$ 之形，而 h 由上述递归式定义．設可以这样表示，則

$$f(a_1, \cdots, a_{r-1}, 0) = Ah(a_1, \cdots, a_{r-1}, 0)$$
$$= AA_1(a_1, \cdots, a_{r-1})$$

将为 $a_1, \cdots, a_{r-1}$ 的原始递归函数(多重递归函数),故

$$f(a_1, 0, \cdots, 0) = AA_1(a_1, 0, \cdots, 0)$$
$$= k(a_1) + (r-1)k(0)$$

将为 a_1 的原始(多重)递归函数. 这与 $k(x)$ 的性质不合. 从而定理得証.

当 $r=1$ 时,証明較繁,这里从略.

习　題

1. 是否任一 r 元一般递归函数均能表成下列各形之每一形 (即是否下列各形均为一般递归函数的典范式)?

(1) $f(x_1, \cdots, x_r) = A \operatorname*{rti}_{w} B(x_1, \cdots, x_r, w)$;

(2) $f(x_1, \cdots, x_r) = A \operatorname*{inv}_{w\to x_1} B(w, x_2, \cdots, x_r)$;

(3) $f(x_1, \cdots, x_r) = A \operatorname*{unv}_{w\to x_1} B(w, x_2, \cdots, x_r)$,

如能,試問其中的 A、B 可作怎样的限制?

2. 試直接証明(假定 f、g 为一元):

(1) 如果 f、g 分别可表成 $K \operatorname*{stp}_{t\to pg(x,0)} g(t)$ 之形, 則 f 与 g 迭置后的新函数亦然;

(2) 同时, $f^{-1}x$ 亦然.

3. 在典范式中亦可只使用无参数的 stp 及 reg. 試証:

(1) 如命

$$g(n) = Spg(Kn, Ln+1) \cdot N^2n \cdot N^2(\min_{i\to Ln} N^2F(Kn, i)),$$

則有

$$\operatorname*{stp}_{x\to n} g(x) = S \operatorname*{rti}_{y}(F(Kn, y) \dot{-} Ln),$$

从而

$$\operatorname*{rti}_{y} F(u, y) = D \operatorname*{stp}_{x\to A} g(x) \quad (A \text{ 表 } Spg(x, 0));$$

(2) 如命

$$U(n) = \mathrm{eq}(n, pg(Kn, Ln) \oplus \max_{i\to Ln} NB(Kn, i)),$$

$$V(n) = \mathrm{eq}(n, pg(Kn, Ln) \oplus B(Kn, Ln) \oplus \max_{i\to Ln\dot{-}1} NB(Kn, i)),$$

則有

$$K \operatorname{rti}_{y} B(u, y) = \operatorname*{reg}_{(x,y)\to(0,A)} \{Spg(KDx, SLDx)NU(x),$$
$$yNU(x) + KLx \cdot NV(x)\};$$

(3) 利用上两結果,把典范式中的 stp 及 reg 限于无参数;

(4) 試証任何一元一般递归函数均可表成下两形:

$$f(x) = h(x^2+1), \quad f(x) = h(2^x),$$

其中 $h(x)$ 則呈 $\operatorname*{reg}_{(x,y)\to(0,x)} \{g(x), B(x, y)\}$ 之形.

§8 部分函数与半递归函数

定义 如果 f 未必处处有定义（包括处处有定义的及处处沒有定义的）,則 $f(x)$ 称为**不全函数**,亦称**部分函数**.

通常数学书中常用到部分函数. 例如, 数学分析中經常只討論在一区間內定义的函数,而很少討論在整个数軸上定义的函数; 又如数学分析中明确規定 $\frac{x}{0}$ 及 0^0 是沒有值的, 这都是使用部分函数的例子. 設 $f(x)$ 为部分函数, 則 $0 \cdot f(x) = 0$ 未必成立 (因当 $f(x_0)$ 无定义时, $0 \cdot f(x_0) = 0$ 是不成立的), 正如在数学分析中沒有理由认为 $y \cdot \frac{x}{y} = x$ 对一切 y 成立、沒有理由认为 $x^0 = 1$ 对一切 x 成立一样.

通常,在需要时常常补充定义,对函数原来沒有定义的地方适当地指定一个值. 最常見的是指定一个值以使該函数成为連續函数. 如指定 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处之值为 1 等等. 又如在討論某些函数的积分时, 常常补充定义, 把原来沒有定义的地方規定其值为 0, 因而使得每个有界区域的重积分皆呈

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

的形式 (卽是使其积分区域成矩形) 等等. 在递归函数論中, 也經常采用这个办法. 例如,約定 $\left[\frac{x}{0}\right] = 0$, 以及約定当在 n 以下 $f(x)$

沒有零点时，$\underset{x\to n}{\mathrm{rti}} f(x)$ 卽指 n 等等便是．应否采取这个办法，把每个部分函数都补全为处处有定义的函数呢？

对某个部分函数 $f(x)$ 說来，可用下法而补全該函数成为一个处处有定义的函数 $h(x)$，卽定义：

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \text{ 有定义时}, \\ 0 \ (\text{或别的某一个可計算的函数}), & \text{当 } f(x) \text{ 沒有定义时}, \end{cases}$$

这样，如永能够对任意的 x 而在有限步內决定 $f(x)$ 有否定义，那末，任給一值 x，均能够求出 $h(x)$ 的值了．故补全以后得到的便是一个处处有定义的可計算函数．

但是，如果对于函数 f，当給出 x 后未必能够决定 $f(x)$ 有否定义，那末当应用上法加以补全时，所得到的 $h(x)$ 尽管处处有定义，却不是处处可以計算的．因为“$f(x)$ 有定义与否”既不知，利用該条件而湊合定义的 $h(x)$ 的值也就无从計算了．但递归函数論中有一重要的要求，卽必須处处保持可計算性（宁可丧失“处处可定义性”），而依上法所作的补全过程却与我們的希望背道而馳，因而在这情形之下，我們宁可使用可計算的部分函数 $f(x)$，而不愿使用处处有定义的不可計算的 $h(x)$．

綜上所述，部分函数可分两种，第一种是对每个 x 均可以在有限步驟內判定它是有定义或否的，这种函数可以补全为处处有定义的可計算函数，因而实际上与处处有定义的可計算函数相差极微，如果需要的話，随时可将其补全．另一种是不能对每个 x 均在有限步驟內判定 $f(x)$ 有定义与否的，这种函数不能补全为处处可定义的可計算函数，因而这种函数叫做**无法补全的**．部分函数所以值得討論，正由于还有无法补全的函数．

关于部分函数的相等及运算，須作詳細的討論：

(1) $f(x)\simeq g(x)$ 指两者定义域相同，并且在定义域中两者的值处处相等．这时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以說是**严格相等**（如果理解为：

当两者均有定义时其值相等,则可叫做**弱相等**). 对于$f(x)\simeq g(x)$必須注意: 它們可以是沒有定义的, 但当其一有定义时, 另一亦必有定义(以保証定义域相同), 而在有定义处, 必两者相等. 因此, 当$f(x)$为部分函数时,可以出現下列式子而不发生矛盾:

$$f(x_0)\simeq f(x_0)+1 \quad (\text{其中 } x_0 \text{ 为某一数字}),$$

或者甚至于出現

$$f(x)\simeq f(x)+1 \quad (\text{其中 } x \text{ 为变元}).$$

因为,这只表明f在x_0处沒有定义,或者f处处沒有定义罢了.

(2) 当对部分函数作迭置时,例如,由$f(x_1, \cdots, x_m)$与$g_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$作迭置而得$h(x)$时, 当然$h(x)$亦是部分函数, 其定义域可如下决定:

如果某个g_i在x_0处沒有定义,则h在x_0处也沒有定义;

如果每个g_i在x_0处皆有定义, 并且$g_i(x_0)=b_i$, 则当f在$(b_1,\cdots, b_m)$处有定义时, h在x_0处亦有定义, 这时其值为$h(x_0)=f(b_1,\cdots, b_m)$; 此外则$h$在$x_0$处沒有定义.

这种定义是很显然的. 不过, 必須注意下列情况: 当$f(x)$为部分函数时, $0\cdot f(x)$乃至$O(f(x))$未必为0, 即下列等式是不成立的:

$$0\cdot f(x)\simeq 0,$$

$$O(f(x))\simeq 0 \quad (\text{第一个“}O\text{”是零函数})$$

(只有理解为弱相等时,它們才成立. 注意: $f(x) \dot{-} f(x)\simeq 0\cdot f(x)$却是成立的).

(3) 当对部分函数实施算子$\underset{x\to y}{\alpha}$时, 則作如下理解: 当求$\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$时必須使用若干个$f$值,如果这些$f$值中有些是无定义的,則$\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$亦无定义; 如果这些$f$值均有定义, 則$\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$有定义与否便根据算子本身的要求而决定了.

例如, 如果所用的各f值均有定义, 則当α为迭函算子、原始

递归算子等能行算子时，$\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 必有定义．但当 α 不是能行算子时，即使所用的 f 值均有定义，$\underset{x\to y}{\alpha} f(x)$ 也未必有定义．今用(不受限)摹状式及一般递归式为例来說明．这里，我們允許无条件使用 $\underset{x}{\mathrm{rti}}$，故 $\underset{x}{\mathrm{rti}}$ 叫做**半摹状式**．又允許无条件使用 reg，故它叫做**半递归式**(又名**部分递归式**)．

当半递归式及半摹状式作用于部分函数时，其值可如下定义：

如果 $f(x, y)$ 为部分函数，則 $\underset{y}{\mathrm{rti}} f(x_0, y)$ 有定义当且仅当有 y_0，使 $f(x_0, y_0)=0$，且 $f(x_0, 0)$，$f(x_0, 1)$，$\cdots$，$f(x_0, y_0\dot{-}1)$ 均有定义，且其值均非 0；在这种情形之下，$\underset{y}{\mathrm{rti}} f(x_0, y)$ 之值为 y_0．

如果 A、B、g 为部分函数，則由下列半递归式所定义的函数：

$$\begin{cases} f(u_1, \cdots, u_r, 0)=A(u_1, \cdots, u_r), \\ f(u_1, \cdots, u_r, Sx)=B(u_1,\cdots, u_r, x, f(u_1, \cdots, u_r, g(Sx))) \end{cases}$$

在 $(u_1, \cdots, u_r, x)$ 处有定义，当且仅当 $A(u_1, \cdots, u_r)$ 有定义、g 在 x 处归宿于 0 (即 $g(x)$，$gg(x)$，$\cdots$ 恒有值，直到它为 0 为止)，而且在 $f(u_1,\cdots, u_r, x)$ 的計算过程中各中間步驟均有結果．这时，它的值即为最后步驟得到的值．

照这样理解，凡能行算子及半能行算子作用于部分函数而得出新部分函数时，只要所造函数在某处是有定义的(依上定义)，那末便必可在有限步驟內計算出它在該处之值．

定义 从本原函数出发，經过有限次迭置与半递归式所作成的函数叫做**半递归函数**(又名**部分递归函数**)．

完全与上述討論一般递归函数处相似 (甚至于証明字眼也极少更改)，可得：

定理 1 只要添入下列五組函数

(1) $x\dot{-}y$，$[y/x]$；

(2) $x+y$，$x\cdot y$，$\mathrm{eq}(x, y)$；

(3) $x+y$，$N^i E_q x$；

(4) $x+y$, N^2L_ax;

(5) $x+y$, $N^2\bar{L}_ax$

之一作为开始函数，則利用迭置及半摹状式可以作出部分递归函数集.

定理 2 只要添入下列两組函数:

(1) $x+y$, E_ax;

(2) $x+y$, $\bar{L}_ax$

之一作为开始函数,則利用迭置及无条件使用的无参数的 inv (求逆算子)即可作出部分递归函数集.

我們还有下列的定理.

定理 3 如上选取一元带头函数 $K(x)$, 則任給一个 r 元部分递归函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$, 恒有三个 $r+1$ 元初基函数 $B(x_1,\cdots,x_r,y)$、$D(x_1,\cdots,x_r,y)$、$g(x_1,\cdots,x_r,y)$, 及一个 $r+2$ 元的初基于 $x+y$、Kx 的函数 H, 使得

$$f(x_1,\cdots,x_r)=K\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\,B(x_1,\cdots,x_r,y),$$

$$f(x_1,\cdots,x_r)=K\,\underset{y\to1}{\mathrm{stp}}\,D(x_1,\cdots,x_r,y)$$

及

$$f(x_1,\cdots,x_r)=\underset{(x,y)\to(0,1)}{\mathrm{reg}}\{g(x_1,\cdots,x_r,x),\ H(x_1,\cdots,x_r,x,y)\}.$$

定理 4 一般递归函数恒同于处处有定义的半递归函数.

証明 利用定理 3 的典范形容易証得.

此外便不再多談了. 可以說, 前面关于一般递归函数的一切討論,差不多完全可以适用于半递归函数,連証明也可极少更改.

习 題

1. 如果两者均可无条件使用, 求証 $\underset{x}{\mathrm{rti}}$ 及 $\underset{x\to n}{\mathrm{inv}}$ 可用 ($\underset{x\to n}{\mathrm{unv}}$、$\underset{x\to n}{\max} N$) 表示,又,容許参数的 unv 可用无参数的 unv 表示,把所需的函数列出.

注意: 如果必須証明存在且唯一才可使用 $\underset{x\to n}{\mathrm{unv}}$, 則 $\underset{x}{\mathrm{rti}}$、$\underset{x\to n}{\mathrm{inv}}$ 及容許参数的 $\underset{x\to n}{\mathrm{unv}}$ 只能由 ($\underset{x\to n}{\mathrm{unv}}$、$\sum\limits_{x\to n}N$) 表示.

2. 試由可无条件使用的 stp 及迭置而作出部分遞归函数集(要求开始函数尽量少).

3. 半遞归謂詞集对哪些命題联結詞是封閉的? 对哪些命題联結詞則不封閉? 对哪些量詞(受限、不受限)封閉? 对哪些量詞則不封閉?

注: A 为半遞归謂詞是指:有一个半遞归函数 f 使得

$A(x_1, \cdots, x_n)$眞　当且仅当 $f(x_1, \cdots, x_n)$有定义且等于零.

4. 試証: 由适当的一元函数出发, 利用(1, 1)迭置可以由无条件使用的 inv 或 stp 而造出一元半遞归函数集.

§9 可在有限步驟內計算的函数

在上面的討論中,我們曾多次提及"一个能够在有限步驟內对每組变元都可計算其值的函数". 这句話表面看来很容易懂,但实际上却牵涉到許多問題,必須对它作出确切的分析. 为此,我們必須对"可在有限步驟內計算"的概念加以明确化.

一个計算,即使是"心算"吧,总可以設法把該計算記录下来. 在記录計算过程的时候,必須用一些符号,如数字符号、变元符号、函数符号、括号、逗号等等. 不同符号的个数可以有穷,亦可以无穷. 在下面将証明,只使用有穷个不同符号便够了,而且甚至只使用两个符号便够了. 但目前則以允許使用无穷个不同符号更覚方便些.显見,不失一般性,可以假定所使用符号只限于下列这些(順便列出对它們的**編号**):

$=$	(	)	,	数字 n	变元 x_n	函数 σ_n
1	2	3	4	$3n+5$	$3n+6$	$3n+7$

这里假定:每个数都用不等的数字表示,而不是只由十个数字表示. 亦即这里把象"324"那样的数整个看作一个新符号,而不再看作由三个数字3、2、4并列而成的符号. 因此,如果知道一个符号为数符,而且編号为 b, 則这数符所表示的数(即上文的 n) 必是 $n=[(b \dot{-} 5)/3]$.

我們很少使用单个符号,而总是使用一系列的符号,这种一列

一列的符号便叫做式子. 我們不但使用零星的式子,还使用一連串一系列的式子. 因此,我們也須对"式子"(卽符号序列)及式子序列加以**編号**才行. 这种編号方法有好多种,但須满足:由式子或式子序列恒可找出其編号;由編号(如果它为式子或式子序列的編号)能够找出式子本身或式子序列的各項. 我們使用下列編号方法(下文中永选用准初基的 tm 及 seq, 見 137 頁):

設符号 $a_1, \cdots, a_k$ 的編号为 $i_1, \cdots, i_k$, 則由 $a_1, \cdots, a_k$ 依次毗連而得的符号列, 其編号約定为 $\underset{i\to k}{\operatorname{seq}}\, a_i$ (指定 $a_0=k$), 这数今后亦写为: $\operatorname{sq}[k, i_1, \cdots, i_k]$. 其次, 如果式子 $E_1, \cdots, E_h$ 的編号分別为 $e_1, \cdots, e_h$, 則由 $E_1, \cdots, E_h$ 所組成的式子序列,其編号約定为: $\operatorname{sq}[h, e_1, \cdots, e_h]$. 这样, 每个符号、每个式子、每个式子的序列,都对应于一数. 例如:式子

$$x_0=3+2$$

对应于数:

$$\operatorname{sq}[5, 6, 1, 14, 10, 11]$$

(其中設 σ_1 表示"+"),又,如果一式的編号为 360, 則該式子可如下求出:先求 tm(0, 360) 得出項数,卽符号个数(設記为 k);然后依次求 tm(1,360) 以至 tm(k, 360)等,卽得相应的符号序列.

同样,下列的式子序列

$$x_0=3+2, \quad x_0=5$$

的編号是 $\operatorname{sq}[2, \operatorname{sq}[5, 6, 1, 14, 10, 11], \operatorname{sq}[3, 6, 1, 20]]$; 反之,如欲求編号为 360 的式子序列,亦可同法进行:易知"360"不是任何式子序列的編号.

由上例可知,当給出一編号时,必須指明:它是一符号的編号,还是一式子的編号,还是一式子序列的編号. 当然,如果多作些特殊的規定,可以由編号本身判断其屬于哪一类.

在計算中,必須使用一些"运算",这是計算过程的主要內容. 所謂运算,便指由若干个式子(个数随运算之不同而不同)得到一

个新式子的动作（或方法），因此运算可以看作是以式子为变域而以式子为值的函数．例如，某运算可以表示为下列的函数 Φ：$G=\Phi(F_1, F_2, \cdots, F_h)$，这里諸 F_i 及 G 都是式子．

既对式子进行了編号，因此极易使每一种式子运算对应于一数論函数．設有一运算 $G=\Phi(F_1, F_2, \cdots, F_h)$，并命 G 及諸 F_i 的編号分別为 y 及諸 x_i，則 y 与諸 x_i 之間显然有函数关系．設該关系的特征函数为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_h, y)=0$，則 f 便叫做**相应于运算 Φ 的数論函数**．当符号及式子的編号确定后，相应于运算 Φ 的数論函数也就确定了．

最常用而又最重要的运算有两个，即代入运算及替换运算．因此，不妨先来看看，相应于这两运算的数論函数究竟是什么函数．

代入 設原式为 E，把 E 中所有变元 x_j 均代入以数字 a，結果得一式 E'，叫做**在 E 中把 x_j 代以 a 而得 E'**，記为

$$E'=\mathrm{sub}(E, j, a).$$

今設 E 的編号为 e，而 E' 的編号为 e'，則应有一数論函数 sb，使得

$$\mathrm{sb}(e, j, a, e')=0.$$

今求該数論函数 sb.

我們知道，e 与 e' 之間的关系应是

$$\mathrm{tm}(0, e)=\mathrm{tm}(0, e');$$

$$\forall i[i\leqslant \mathrm{tm}(0, e)\wedge i\neq 0\wedge \mathrm{tm}(i, e)=3j+6 \cdot\supset \mathrm{tm}(i, e')=3a+5];$$

$$\forall i[i\leqslant \mathrm{tm}(0, e)\wedge i\neq 0\wedge \mathrm{tm}(i, e)\neq 3j+6 \cdot\supset \mathrm{tm}(i, e')=\mathrm{tm}(i, e)],$$

作合取之后，其特征函数显然为 e、j、a、e' 的初基函数（参見初基函数集处的討論）．

替换 設有一式 F（編号为 f）呈 $A=B$ 形，又有一式 E（編

号为 e). 今在 E 中把从第 $t+1$ 个符号开始的部分式子 A 代换以 B, 所得式子 E' (編号設为 e') 叫做**依 F 而在 E 中第 t 个符号处作替换的結果**. 記为 $E'=\mathrm{rep}(F, E, t)$. 仿上, 它亦应有一特征函数 $\mathrm{rp}(f, e, t, e')$, 下面試来求出該函数.

我們知道, e、f、e' 之間的关系应如下刻划: 命

$$l=\underset{n\to \mathrm{tm}(0,f)}{\mathrm{rti}}[\mathrm{tm}(n+1, f)\dot{-}1],$$

这表示 F 中第 $l+1$ 个符号为等号. 从而 F 的左端 (即 A) 的符号个数为 l; 而右端(即 B)的符号个数为 $\mathrm{tm}(0, f)\dot{-}(l+1)$, 今后記为 q. l 及 q 均为受界于初基函数的准初基函数.

我們有:

(1) E 中第 $t+1,\cdots, t+l$ 个符号分别与 F 中的第 1 个, $\cdots$, 第 l 个符号相同, 即

$$\underset{i\to Dl}{\forall}(\mathrm{tm}(i+1, f)=\mathrm{tm}(t+i+1, e));$$

(2) E' 中第 $t+1, t+2,\cdots, t+q$ 个符号分别与 F 中的 $l+2, l+3, \cdots, l+q+1$ 个符号相同, 即

$$\underset{i\to Dq}{\forall}(\mathrm{tm}(t+i+1, e')=\mathrm{tm}(l+i+2, f));$$

(3) E 中第一个, $\cdots$, 第 t 个符号与 E' 中第一个, $\cdots$, 第 t 个符号相同, 即

$$\underset{i\to Dt}{\forall}(\mathrm{tm}(i+1, e)=\mathrm{tm}(i+1, e'));$$

(4) E 中第 $t+l+1, \cdots$, 第 $\mathrm{tm}(0, e)$ 个符号分别与 E' 中第 $t+q+1, \cdots$, 第 $\mathrm{tm}(0, e)+q\dot{-}l$ 个符号相同, 即(将 $\mathrm{tm}(0, e)\dot{-}(t+l+1)$ 記为 α)

$$\underset{i\to\alpha}{\forall}\mathrm{tm}(t+l+1+i, e)=\mathrm{tm}(t+q+1, e')];$$

(5) $\mathrm{tm}(0, e')=\mathrm{tm}(0, e)+q\dot{-}l$.

这里, 諸和式 $t+i+1$, $t+l+i+1$ 等均受界于 $\mathrm{tm}(0, e)$ 或 $\mathrm{tm}(0, e')$, 故均可表成初基函数, 将(1)~(5)諸公式作合取再冠以 $\underset{l\to f}{\exists}$ 后, 其特征函数 (即 $\mathrm{rp}(f, e, t, e')$) 显然又是初基函数.

可見，相应于代入及替換的两数論函数皆为初基函数．对于别的运算可能为更簡单的函数(如兼为五則函数)或更复杂的函数(如原始递归，多重递归及一般递归函数)．但对下面的討論，可以不管所用的运算到底是什么，亦即不管它們所对应的函数到底是怎么样的数論函数．

既然詳細討論了計算时所用的“原料”(符号，式子)及“工具”(运算)，下面便可討論什么是計算过程了．

設有一組等式 E 及若干个 (s 个)运算(叫做**容許运算**)，如果可以找出滿足下列条件的一系列式子：$F_0, F_1, \cdots, F_h$：

第一，諸 F_i 或为定义等式組 E 中某等式之一；

第二，諸 F_i 或为由前面若干个 F_j 根据容許运算而得的結果的式子；

第三，最后一式 F_h 是一等式，其左端是 $\sigma_0(a_1, \cdots, a_r)$，而右端是一数字．它便是根据定义的 σ_0 在$(a_1, \cdots, a_r)$处之值．

这列式子便称为等式系 E 根据所容許运算而对 $\sigma_0(a_1,\cdots,a_r)$ 所作的**計算过程**．并称 σ_0 在 $(a_1,\cdots, a_r)$ 处是**可根据等式系 E 而計算的**．

定义 如果定义等式系 E 及容許运算是不随 $a_1, \cdots, a_r$ 的选擇而更改的(但 $F_0, \cdots, F_h$ 乃至于 h 的大小，則是随 $a_1, \cdots, a_r$ 的选擇而更改的)，即用同样的 E 及容許运算，可以在对于 σ 有定义的一切地方而計算其值．則說 σ 是**可半計算的**．更明确說来，σ **可由等式系 E 及諸运算而半計算的**．如果 σ 处处有定义，又是可半計算的，則說 σ 是**可完全計算的**，或 σ 是**可計算的**．

定理 1 如果有一組定义等式，由該組等式及容許运算(設它們对应于数論函数 $g_1, \cdots, g_s$)可以半計算出一函数 σ_0 在每一組有定义的变元 $(a_1, \cdots, a_r)$ 处的値，則 σ_0 必是部分递归于 $g_1, \cdots, g_s$ 的函数．如 σ_0 处处有定义，則它是一般递归于 $g_1, \cdots, g_s$ 的函数．

証明 設該定义等式組的編号为 m，显然每个等式的編号便是 $\mathrm{tm}(i, m)$ $(i=1, \cdots, \mathrm{tm}(0, m))$.

既然对应于每組有定义的变元$(a_1, \cdots, a_r)$均可計算出$\sigma_0(a_1, \cdots, a_r)$之值，因此对每个这样的变元組，一定可找出一个計算过程 $F_0, F_1, \cdots, F_h$ 満足上述三个条件．这个計算过程将有一編号 w，显然諸 F_i 的編号为 $\mathrm{tm}(i, w)$ (其中 $i=1, \cdots, \mathrm{tm}(0, w)$)，既然諸 F_i 須満足上述三个条件，故 w 亦須満足一些条件．今把 w 所应満足的条件求出如下：

第一，F_i 为定义等式組中某等式之一，显然可表为

$$\underset{t\to D\mathrm{tm}(0, m)}{\exists}(\mathrm{tm}(i, w)=\mathrm{tm}(t+1, m)),$$

其特征函数为下列的初基函数：

$$\min_{t\to D\mathrm{tm}(0,m)} N^2\mathrm{eq}(\mathrm{tm}(i, w), \mathrm{tm}(St, m))\ (\text{簡記为 } Q_1(i, m, w)).$$

第二，F_i 由前面若干个 $F_{s_1}, \cdots, F_{s_k}$ 根据运算 G_j (相应的数論函数为 g_j) 而得．这可表示为：

$$\underset{s_1\to Di}{\exists}\ \underset{s_2\to Di}{\exists}\cdots\underset{s_k\to Di}{\exists} g_j(\mathrm{tm}(s_1, w), \cdots, \mathrm{tm}(s_k, w), \mathrm{tm}(i, w))=0,$$

其特征函数为初基于 g_j 的函数：

$$\min_{s_1\to Di} N^2 \min_{s_2\to Di} N^2\cdots\min_{s_k\to Di} N^2 g_j(\mathrm{tm}(s_1, w), \cdots, \mathrm{tm}(s_k, w), \mathrm{tm}(i, w)).$$

将 j 依次代以 $1, 2, \cdots, s$，再作初基乘积，所得的式子下面簡記为 $Q_2(i, w)$ (由于 s 为定数，而 g_j 未必是可表为 j 的很簡单的函数，所以这里須用⊗作出 $g_1\otimes g_2\otimes\cdots\otimes g_s$，而不应該作“$\min\limits_{j\to s} g_j$”)，$Q_2$ 是初基于 $g_1, \cdots, g_s$ 的函数．

对一切非零的 i，均使 F_i 或満足第一条件，或満足第二条件，其特征函数为：

$$\max_{i\to D\mathrm{tm}(0, w)} N^2(Q_1(Si, m, w)\otimes Q_2(Si, w)).$$

第三，最后一式 F_h 必呈 $\sigma_0(a_1, \cdots, a_r)=l$ 形 (这里 r 为給出

的定数，而 l 为某一数字)，这条件可表为(这里把"$\mathrm{tm}(\mathrm{tm}(0, w), w)$"簡記为 Tw)：

$$\underset{l\to w}{\exists}[\mathrm{tm}(0, Tw)=2r+4\wedge\mathrm{tm}(1, Tw)=7\wedge\mathrm{tm}(2, Tw)=2$$

$$\wedge\mathrm{tm}(3, Tw)=3a_1+5\wedge\mathrm{tm}(4, Tw)=4$$

$$\wedge\mathrm{tm}(5, Tw)=3a_2+5\wedge\mathrm{tm}(6, Tw)=4$$

$$\wedge\cdots\wedge\mathrm{tm}(2r+1, Tw)=3a_r+5\wedge\mathrm{tm}(2r+2, Tw)=3$$

$$\wedge\mathrm{tm}(2r+3, Tw)=1\wedge\mathrm{tm}(2r+4, Tw)=3l+5].$$

其特征函数显为初基函数，記为 $Q_3(r, a_1, \cdots, a_r, w)$.

故知，w 应为下列函数的零点：

$$\max_{i\to D\mathrm{tm}(0, w)} N^2(Q_1(Si, n, w)\otimes Q_2(Si, w))\oplus Q_3(r, a_1, \cdots, a_r, w).$$

后者可表为(它为初基于 $g_1, \cdots, g_s$ 的函数)

$$R(m, r, a_1, \cdots, a_r, w).$$

如果 $f(a_1, \cdots, a_r)$ 有值，則这函数必有零点(因必有計算过程，而計算的編号必滿足該条件)，而这函数的零点 w_0 必滿足前述三条件，从而 w_0 必为 $\sigma_0(a_1, \cdots, a_r)$ 的某个計算过程的編号．因此

$$w_0=\underset{w}{\mathrm{rti}}\,R(m, r, a_1, \cdots, a_r, w),$$

既得 w_0，即可由下法求 l (即 $\sigma_0(a_1, \cdots, a_r)$) 之值：

F_h 的編号为 $\mathrm{tm}(\mathrm{tm}(0, w_0), w_0)$，設記为 y_0.

F_h 最后一符号的編号为：$\mathrm{tm}(\mathrm{tm}(0, y_0), y_0)$，

但該符号的編号又显然为 $3l+5$，故得

$$l=\left[\frac{\mathrm{tm}(\mathrm{tm}(0, y_0), y_0)\dot{-}5}{3}\right].$$

設記其为 $V(w_0)$，它为 w_0 的零級初等函数.

故得

$$\sigma_0(a_1, \cdots, a_r)=V(w_0)=V\,\underset{w}{\mathrm{rti}}\,R(m, r, a_1, \cdots, a_r, w).$$

由此显然可推得 $\sigma_0(a_1, \cdots, a_r)$ 为半递归于 $g_1, \cdots, g_s$ 的函数，于是定理得証.

这里的V虽是零級初等函数,但可加以改进,改用預先选定的配对左函数Kx,其方法如下:命$v=pg(V(w_0), w_0)$,則v应满足条件(注意:$w_0=Lv$, $Kv=Vw_0=VLv$):

$$Kv=VLv\wedge R(m, r, a_i, Lv)=0$$
$$\wedge N^2Lv\cdot\max_{x\to DLv}NR(m, r, a_i, x)=0,$$

这方程的特征函数显然仍是初基于$g_1, \cdots, g_s$的函数,可記之为$B(m, r, a_i, v)$. 故得

$$\sigma(a_1, \cdots, a_r)=Vw_0=Kv$$
$$=K\,\underset{v}{\mathrm{rti}}\,B(m, r, a_1, \cdots, a_r, v).$$

这里K为預先选定的带头函数,而B为初基于諸g_i的函数.

因此,如果相应于容許运算的函数(諸g_i)为部分递归函数,則凡有定义等式的处处有定义的函数都是一般递归函数.在特例,有下定理.

定理2 函数$\sigma(a_1, \cdots, a_r)$为部分递归函数,当且仅当有一組定义等式,根据这組等式,只由代入与替换两运算便可以半計算出該函数在有定义的每組变元处之值.

証明 充分性是显然的. 因为上面已証明相应于代入与替换的数論函数是初基函数,从而由上段結論可知,所定义的函数必是部分递归函数.

必要性可如下看出:如果$\sigma(a_1, \cdots, a_r)$是部分递归函数,那末必有一个定义过程:$f_0, f_1, \cdots, f_h=\sigma$,使得每一个$f$或为本原函数之一,或为前面的$f$根据迭置或部分递归式而得到的.

如果f_i为本原函数,显然只用代入(把变元代以当时变元之值)便可以得到f_i之值(即使对$x+1$說来,亦承认:$0+1$, $1+1$, $2+1$, $\cdots$的值是无条件地知道了的).

如果f_i由迭置而得,設$f_i=f_{s_0}(f_{s_1}, \cdots, f_{s_k})$,由归納假設,$f_{s_0}$, f_{s_1}, $\cdots$, f_{s_k}可由代入及替换而算出其值,那末先由代入及替换得

$f_{s_1}, \cdots, f_{s_k}$ 之値,再根据替換卽得 $f_{s_0}(f_{s_1}, \cdots, f_{s_k})$ 之値,亦卽得 f_i 之値.

如果 f_i 由部分遞归式而得,設

$$\begin{cases} f_i(a_1, \cdots, a_{r-1}, 0) = f_{s_1}(a_1, \cdots, a_{r-1}), \\ f_i(a_1, \cdots, a_{r-1}, a_r+1) = f_{s_2}(a_1, \cdots, a_{r-1}, a_r, \\ \qquad\qquad f_i(a_1, \cdots, a_{r-1}, f_{s_3}(a_1, \cdots, a_{r+1}, a_r+1))), \end{cases}$$

那末当 f 在 $(a_1, \cdots, a_r)$ 有定义时,欲求出 $f(a_1, \cdots, a_r)$,可先在最后变元处作代入.

如果 $a_r=0$,則由第一式知其等于 $f_{s_1}(a_1, \cdots, a_{r-1})$,但由归納假設,$f_{s_1}$ 可由代入及替換而計算,故 $f_i(a_1, \cdots, a_{r-1}, 0)$ 亦可由代入及替換而得其値.

如果 $a_r \neq 0$,則必有 d,使 $f_{s_3}^d(a_r)=0$ (暫不写出其参数),那么可由第二式逐步計算下列之値:

$$f_i(a_1, \cdots, a_{r-1}, f_{s_3}^{d-1}(a_r)),$$
$$f_i(a_1, \cdots, a_{r-1}, f_{s_3}^{d-2}(a_r)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$f_i(a_1, \cdots, a_{r-1}, f_{s_3}(a_r)).$$

最后卽可計算 $f_i(a_1,\cdots, a_{r-1}, a_r)$ 之値. 其詳細步驟今不贅述了. 故 f_i 亦可由代入及替換而計算之. 依数学归納法卽知,$f_h=\sigma$ 亦可由代入及替換而計算之,于是必要性得証. 定理从而得証.

根据本定理,可对前面的結論作一加强. 在§7曾証明:对每个 r 元部分(一般)遞归函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$,均可找到一个 $r+1$ 元初基函数 B,使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_r)=K \operatorname*{rti}_w B(x_1,\cdots, x_r, w)$. 这里 K 虽可对一切 r 元遞归函数通用,但 B 却随 f 而更改. 現在可以加强为下定理.

定理 3 有一个固定的帶头函数 K 及一个固定的 $r+2$ 元初基函数 B,使得任給一个 r 元部分(一般)遞归函数 $f(x_1,\cdots, x_r)$,均可找出一数 m,使得

$$f(x_1, \cdots, x_r) = K \underset{w}{\mathrm{rti}}\, B(m, x_1, \cdots, x_r, w).$$

証明　由上面两定理的証明可以看出，相应于代入与替换的数論函数 g_1、g_2 是固定的，与函数 f 无关；而由前一定理，可找出两个固定的函数 K 及 B（K 絕对固定，B 则依賴于 g_1、g_2），使得：

$$f(x_1, \cdots, x_r) = K \underset{w}{\mathrm{rti}}\, B(m, x_1, \cdots, x_r, w).$$

当函数 f 变化时，仅只变化 f 的定义等式，因而只变换自然数 m，別的一概不动，定理于是得証.

根据这条定理，每一个一般递归函数均可由該表达式中的 m 决定．因此，在某种意义上說（的确，在有些书上便采用这种說法的），函数 $K \underset{w}{\mathrm{rti}}\, B(m, x_1, \cdots, x_r, w)$ 可以作为 r 元一般递归函数的枚举函数，相应的 m 便是相应的函数的編号．不过，我們知道这函数（兼作为 m 的函数）并非对每个 m 都是一般递归函数．对某些 m 說来，它为一般递归函数；对某些 m 說来，它不是一般递归函数．因此，尽管它包含了一切一般递归函数，我們是不把它当作一般递归函数集的枚举函数的（这問題在第六章 §3 还有詳細的討論），它只能是部分递归函数集的枚举函数.

定理 4　有两个固定的一元函数 K 及 B，使对任給一个 r 元一般递归函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$，均有一数 m，使得

$$f(x_1, \cdots, x_r) = K \underset{w}{\mathrm{rti}}\, Bpg^{r+1}mx_1\cdots x_r w.$$

讀者自己写出其証明.

上定理中的 B 可以說是对 r 元函数通用，而这里的 B 則可說对全体函数都通用（但实际只就一元的一般递归函数而找通用的 B 便成了）.

但始終不能断定：有沒有这样一些容許运算，它們的相应函数不是一般（部分）递归函数？借助于經驗可以回答說“沒有”，但这个回答有否例外呢？

我們是可以作出一些非一般递归函数的（例如，第六章 §3），

与它們相应的运算能否作为容許运算呢?事实上,在那些函数的定义中,都是利用了凑合定义的,而在凑合定义中,其分别情况时所依据的条件却是不易判定的(在某种意义下还是不可能在有限步驟內判定的).因此,具体給出变元之值时,其函数值未必可半計算.相应于这种不能計算其值的运算,一般应該认为是不能容許的运算.

因此,如果只有对应于半递归(一般递归)函数的运算才能是被容許的运算,那末"可在有限步驟內(使用容許的运算)半計算的函数"便和半递归(如处处有定义,便和一般递归)函数等同.所以,"可在有限步驟內半計算"的函数能否看作半(一般)递归函数的問題,等于問:不对应于半(一般)递归函数的运算是否被容許.

习　　题

1. 試明确写出本节中所提到的初基函数. 具体說来,把 $\mathrm{sb}(e, j, a, e')$, $\mathrm{rp}(f, e, t, e')$, $Q_1(i, w)$, $Q_2(i, m, w)$, $Q_3(r, a_1, \cdots, a_r, w)$, $B(m, r, a_1, \cdots, a_r, w)$ 表成初基函数.

2. 試求出对应于下列运算的数論函数(表成尽量低級的初等函数,甚至于表成初基函数):

(1) 将一数的数字次序顚倒(例如把 2437 变成 7342);

(2) 将一数的偶位数字依次移后(例如把 24372 变成 23247);

(3) 将两数的数字依次錯开,顺序排成一数(例如把 234 与 4128 合成 2431428).

3. 試証:有一个固定的初基函数 B,使得任給一个 r 元部分递归函数 f,恒有 m 使 f 可表成

$$f(x_1, \cdots, x_r) = K \underset{w}{\mathrm{rtu}}\, B(m, x_1, \cdots, x_r, w).$$

4. 同上,能否要求表成

$$f(x_1, \cdots, x_r) = K \underset{w \to x_1}{\mathrm{inv}}\, B(m, w, x_2, \cdots, x_r)?$$

§10 可形式計算的函数

本节将討論这样一个問題,即:$f(x)$ 为一般递归函数与可作出一系統使得"任給 m,均有一数 n,使得 $f(m)=n$ 可以証明"这

两者之間的等价性問題.

要提到"証明",那必須是就一种演繹系統而言,更明确些說,要就一种公理系統而言. 所謂公理系統,(大体說来)即指定一些命題作为不必証明的公理(用以推出别的命題,即推出所謂定理),并指出一些推演規則(作为推出时的工具),这两步叫做**公理化**,然后逐步逐步由公理而到中間命題,最后到所求証命題(定理). 但这只是大体上的描述,詳細討論时还有好些概念、好些事实需要澄清. 例如,还必須指定一些不必定义的概念,用以定义别的概念;又如是否要把一切公理及推演規則都列出,甚至于邏輯公理及邏輯法則都要列出,等等也应明确規定.

先就最后一个問題討論. 即公理化是否要貫徹到底? 如果貫徹到底,那末就必須連同邏輯公理及邏輯規則,以至于邏輯上的基本概念均須一一列出,以作为公理、推演規則、基本概念的一部分. 如果不必貫徹到底,那末不但这些邏輯性的东西可以当作已知而使用,甚至于好些"不証自明"的东西也都可以当作已知而使用. 例如几千年来(甚至在現在)都承认欧几里得的"几何原本"是公理系統的一个典型例子,但这个系統中不但沒有把邏輯內容公理化,而且連好些几何本身的內容(如直綫上的点的次序,若干綫的相交性等等)都当作已知而使用. 直到本世紀初,希尔伯特(D. Hilbert)才把欧氏几何"完全"公理化,即除了邏輯性的东西以外,不必再引用什么"已知"的东西了,一切所引用的均已完全列入公理及推演規則之中. 由此可見,"貫徹到底"与否便影响到公理系統的本身. 如不要求貫徹到底,有些系統很可以作为公理系統,但如要求貫徹到底,这些系統却不能算是公理系統了.

現在的一般数学工作者所采取的态度是:要求貫徹到底,但"到底"的程度有两种:

第一种只要求对邏輯以外的东西完全公理化,这时所得的系統叫做**公理系統**.

第二种是要求邏輯內容及邏輯以外的內容一起公理化．所得系統叫做**形式系統**(有些书仍叫公理系統)．

这两要求实质上仍然是一致的，并沒有表面上的差别那么大．因为，邏輯的公理化現在可以认为已完成了，所得的便是一般叫做**純邏輯**(或謂詞演算)．只要在公理系統之上加入純邏輯，便可得到相应的形式系統了．所以，求某某学科的公理系統与求該学科的形式系統实际上是一回事．在具体探求該系統时，当然尽可致力于公理系統方面(因純邏輯已不必花費精力了)，但就这里的討論說来，却并不着眼于某某具体系統，而着眼于遞归函数与形式(公理)系統的关系，这时当然以討論形式系統为宜，因为它把一切都公理化了，便可使得今后的討論和証明，只須注意"由公理所作出的推論"而不必区分邏輯部分与非邏輯部分了．因此，下面只討論形式系統．

当一切都公理化后，所得出的形式系統到底是怎样的系統呢？其外貌，其結构到底是怎样的呢？

形式系統有各种各样，可以包括很广，也可以包括很狹；可以結构很复杂，亦可以結构很簡单．包括很广泛的，例如可把整个数学系統(加上純邏輯)作为一个形式系統；結构很复杂的，仍以形式系統化后的整个数学的系統为代表，在其中不但概念繁多、复杂(例如有各种各样的数，有各种各样的空間，有各种各样的函数，还有各种各样的算子，等等)，而且新概念源源而来(每当某方程有根时便引进一个新函数或新的数)，这样的形式系統可算結构够复杂的了；另一方面，包括很狹的以及結构很簡单的可以用只含0、1二元素的**布尔代数**为代表．

我們还須定义証明过程．形式定理α的**証明过程**可如下定义：設有一系列公式$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，它具有下列性质：

(1) 各α_i或者是公理之一，

(2) 各α_i或者是由前面的$\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \cdots, \alpha_{s_k}$根据一个推理規則

而推出的,

(3) 最末一个公式 α_m 即是形式定理 α 本身,

则这系列公式: $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 便叫做 α 的**証明过程**.

显見,証明过程的上述定义和一函数的定义过程及一函数的計算过程的定义完全类似,甚至可以說本质上是同一类过程.

在一定的編号之下,将有一函数 $m(x)$ 来刻划公理,即:

x 为某公理的編号,当且仅当 $m(x)=0$,

又有一函数 $g_i(x_1, \cdots, x_n, y)$ 来刻划推理規則 R_i, 即:

由編号为 $x_1, \cdots, x_n$ 的公式可根据規則 R_i 而推出編号为 y 的公式, 当且仅当 $g_i(x_1, \cdots, x_n, y)=0$.

显見, $m(x)$ 与上节的定义等式系的編号 m 相当, 函数 $g_i(x_1, \cdots, x_n, y)$ 与上节的函数 g_i 相当,仿上节的討論,即得:

定理 1 設有一形式系統,其中用以刻划公理的函数为 $m(x)$, 而刻划推理規則的函数为 g_i. 如果在該系統中能够推出一条形式定理

$$f(x_1, \cdots, x_n)=l,$$

则 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 必为半递归于 m 及諸 g_i 的函数.

在实际的例子中, $m(x)$ 及 $g_i(x)$ 均为一般递归函数. 如果 x 为公理的編号或否,是不能用一般递归函数刻划的,或者推理規則所对应的函数不是一般递归函数, 那末該系統通常是不叫做形式系統的. 因此, 凡由实际的形式系統所能計算的函数都是半递归(一般递归)函数.

仿上节討論,还可推得下述結果:

定理 2 半递归(一般递归)函数必可在形式系統中半計算.即,如果 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为半递归函数,则必可作出一个形式系統,使得当 f 在 $(x_1, \cdots, x_r)$ 处有定义时, 在这形式系統中可以証明 $f(x_1, \cdots, x_r)=l$ (l 为自然数)形的定理.

这定理可以如下証明:

如果 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 为部分递归函数，那末可以找出 f 的一个定义过程(由本原函数出发，經过迭置及部分递归式而作的 f 的定义过程)．如把这定义过程中各定义式（各中介函数的定义式）完全列出，那末只用代入及替換两运算便可以半計算出 f 的值，卽当其值存在时可以推导出

$$f(a_1, \cdots, a_r) = l$$

形的等式了．由于这点考虑，可以作一个形式系統，在其中可以对

$$``f(a_1, \cdots, a_r) = l"$$

的公式(如果存在的話)給出証明．

这形式系統可具体地作出如下：

第一，組成規則部分．

（一）原子項：

（1）变項　用 $x, y, z, \cdots$ 表示．

（2）常項　$0, 1, 2, 3, \cdots$.

(每一記号(自然数)作为一常項．)

（二）原子公式　（无）．

（三）函数　只用常函数，根据定义过程所需的中介函数而定，表成 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$，并約定以 f_1 表所定义的函数 f.

（四）謂詞　只用常謂詞"＝"表示"等于"．

（五）、（六）联結詞及量詞不用．

（七）复合項及公式：

（1）原子項为項．

（2）如果 f_i 为 n 元函数，而 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为 n 个項，則 $f_i\xi_1\cdots\xi_n$ 为項．

（3）如果 ξ_1、ξ_2 为項，則 $\xi_1=\xi_2$ 为公式．

（4）所謂項及公式卽限于此．

第二，推理規則部分．

（一）公理　把中介函数的定义式都作为公理．此外还加入一

公理 $\xi=\xi$.

（二）推理規則 共有如下三条(符号“$\vdash$”讀作“推出”)：

(1)（代入）$\alpha(x)\vdash\alpha(a)$.

这里 $\alpha(x)$ 为一个含有原子变項 x 的公式，而 $\alpha(a)$ 为在 α 中把各 x 均代以 a 的結果.

(2)（替换）$\xi=\eta$，$\alpha(\xi)\vdash\alpha(\eta)$.

这里 $\alpha(\xi)$ 为一个含有項 ξ 的公式,而 $\alpha(\eta)$ 为把 $\alpha(\xi)$ 中某个 ξ 代以 η 的結果.

(3)（左等換）$\xi=\eta$，$\xi=\zeta\vdash\eta=\zeta$.

（三）形式定理 同前定义.

这个形式系統无疑是把从 f 的定义式(兼中介函数的定义式)而計算 f 的計算过程加以形式化的結果. 旣然当函数 f 有値时只用代入及替换便可以計算 f 的値，那末任給 a_1, …, a_r，在这形式系統中必能証明出 $f(a_1, \cdots, a_r)=l$ 形的形式定理.

“可在有限步驟內,根据容許运算而半計算”及“可在某个形式系統中半計算”这两概念,一般认为是很广泛的,这两个很广泛的概念都証明了与半递归函数相等价,因此,邱吉 (A. Church)便提出一个假說,认为此外再沒有可半計算的函数了，我們称其为“邱吉論題”,可严格叙述如下：

邱吉論題 可半計算(或能行可半計算)的数論函数与半递归函数等同;从而,处处有定义的可計算(或能行可計算)的数論函数便与一般递归函数等同.

关于这个論題是沒有証明的，因为“可(半)計算”或“能行可(半)計算”的概念不是数学的概念. 这个論題只能看作为根据經驗所作的猜測,或者看作是对“可(半)計算”这个概念的一个假設.直到目前,还未发現这个論題的反例,故而邱吉論題被大多数的数理邏輯工作者所采用. 不过,旣沒有經过証明,自然不能算作是定理,而且也不能保証将来不出現反例. 因此,凡引用邱吉論題的地

方都标以"根据邱吉論題"字样，本书也这样做；当发現其反例而放弃"邱吉論題"时，也便可极易修改有关的結論.

习　　题

(1) 試作計算 $x\cdot y$ 的形式系統，并在其中推出"$3\cdot 4=12$"一式.

(2) 試作計算 $[\sqrt{x}]$ 的形式系統，并在其中推出"$[\sqrt{31}]=5$"一式.

第六章　递归生成的函数集

§1 控制函数

定义　設有一函数集 Δ,再設 $g(t, x)$ 对 t 和 x 均不减. 如果在集 Δ 中任取一函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$,恒存在有两数 t_0、a, 使得:

$$f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant g(t_0, \max(a, x_1, \cdots, x_n)), \qquad (*)$$

则称 $g(t, x)$ 为 Δ 的**控制函数**.

注意: 这里要求 $g(t, x)$对 t 和 x 均不减. 如果原給的 $g(t, x)$ 并非不减函数,则可代以 $\max\limits_{t\to t} \max\limits_{x\to x} g(t, x)$,因此这个要求一般說来极易满足. 既然 g 为不减函数,显見 t_0 和 a 均可换为 $\max(t_0, a)$. 因此,下面永假定所找出的两数是相同的,設記其为 t_0.

定理 1　如果函数集 Δ 含有后继函数 Sx,且对迭置封閉,则 Δ 的控制函数,作为 t、x 的二元函数时,不可能属于 Δ.

証明　如果 $g(t, x)$ 属于 Δ, 则 $Sg(t, x)$ 也属于 Δ, 且应可找出 t_0, 使得

$$Sg(t, x) \leqslant g(t_0, \max(t_0, t, x)).$$

今对 t、x 均代以 t_0, 将得

$$Sg(t_0, t_0) \leqslant g(t_0, t_0)$$

的矛盾結果. 定理得証.

当 Δ 为递归生成的函数集时, 其控制函数常可利用下法而得到:

如果 Δ 的开始函数为 $A_1, \cdots, A_h$,而对迭置和算子 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 封閉;又,如果能找出一不减函数 $g(t, x)$满足下列条件:

(1) 对每一 A_i, 均有 t_i, 使得条件$(*)$对 A_i 成立;

(2) 如果对于 A 及 B_i,均有 t_a、t_{b_i},使得$(*)$对 A、对 B_i 成立,

则也有 t_0 使(*)对 $A(B_1, \cdots, B_n)$ 成立;

(3) 在(2)的假設下,也有 t_0,使(*)对 $\underset{x\to y}{\alpha_i}(B_1, \cdots, B_m)$ 成立,那么,$g(t, x)$ 便是該遞归生成的函数集 $\varDelta$ 的控制函数.

如果生成算子 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 滿足一定的条件,則控制函数更易找出.

定义 如果有一不減函数 $G(y, z)$,使得:

$$\underset{x\to y}{\alpha} f(x) \leqslant G(y, \max_{x\to y} f(x)) \quad (f\text{ 中可含有参数,这时 }G\text{ 也含有}),$$

則說 α 是**有界算子**,并以 $G(y, z)$ 为界,$G(y, z)$ 叫做 $\underset{x\to y}{\alpha}$ 的**界**(对一般的 (s, m, n) 型算子,也有类似的定义,这里不予贅述).

今試討論由有界算子遞归生成的函数集.

定义 如果 $f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant g(x_1, \cdots, x_n)$ 永眞,則說 ***f* 被 *g* 所控制**.

定理 2 設函数集 $\varDelta$ 是利用迭置及有界算子从某些开始函数而遞归生成的,如果 $\varDelta$ 的每一个开始函数及它的每一个生成算子的界都被集 ∇ 中某一个不減函数所控制,而 ∇ 对迭置封閉,則 $\varDelta$ 中每一个函数都被 ∇ 中某一个不減函数所控制.

証明 在 $\varDelta$ 中任取一函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$.

如果 f 是开始函数,依假設,它被 ∇ 中某一不減函数所控制.

如果 f 是由迭置而得,設

$$f(x_1, \cdots, x_r) = A(B_1(x_1, \cdots, x_r), \cdots, B_m(x_1, \cdots, x_r)),$$

依归納假設,∇ 中有不減函数 A' 及 B',使得

$$A(x_1, \cdots, x_m) \leqslant A'(x_1, \cdots, x_m),$$

$$B_i(x_1, \cdots, x_r) \leqslant B_i'(x_1, \cdots, x_r) \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

那么,显然有

$$f(x_1, \cdots, x_r) \leqslant A'(B_1'(x_1, \cdots, x_r), \cdots, B_m'(x_1, \cdots, x_r)),$$

后者为不減函数且在 ∇ 中(由于 ∇ 对迭置是封閉的).

如果 f 是由有界算子所生成的,設 $f(x_i) = \underset{x\to x_1}{\alpha} g(x, x_i)$,依定义有 G 使 f 滿足条件

$$f(x_1, \cdots, x_r) \leqslant G(x_1, \max_{x \to x_1} g(x, x_1, \cdots, x_r)),$$

依归納假設，∇ 中有不减函数 G' 及 g'，使得 $G(y, z) \leqslant G'(y, z)$ 且

$$g(x, x_1, \cdots, x_r) \leqslant g'(x, x_1, \cdots, x_r),$$

从而

$$\max_{x \to x_1} g(x, x_1, \cdots, x_n) \leqslant g'(x_1, x_1, \cdots, x_r) \quad (\text{由于 } g' \text{ 不减}).$$

显然亦有

$$f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant G'(x_1, g'(x_1, x_1, \cdots, x_n)),$$

后者属于 ∇ 且为不减函数.

依数学归納法，本定理得証.

由这定理可見，要对由有界算子所生成的函数集找控制函数，只須使用迭置便可作出了.

推論 如果有不减函数 $h(x)$，使得对一递归生成集的开始函数 A_i 及各生成算子的界 $G_j(x, z)$ 說来，恒有 a，使得

$$A_i(x_1, \cdots, x_n) \leqslant h(\max(a, x_1, \cdots, x_n)),$$
$$G_j(x, z) \leqslant h(\max(a, x, z)),$$

則 $g(t, x) = h^t(x)$，卽为該递归生成集的控制函数.

注意：这推論是以前对各級初等函数集找控制函数的方法的推广.

作为二元函数，控制函数 $g(t,x)$ 尽管一般不属于原函数集，但对于每个固定的 t，$g(t, x)$ 却很可能属于原函数集(一般情形也确如此). 因此引入：

定义 如果 $g(t, x)$ 为函数集 Δ 的控制函数，且对每个固定的 t 說来，$g(t, x)$ 均属于 Δ，則函数列 $\{g(t, x)\}$ $(t=0, 1, \cdots)$ 称为 Δ 的**控制骨干**.

定义 設函数集 Δ 的生成算子为 α_i，如果对函数集中每个函数 f 說来，恒可找出一个数 t_i，使得($\tilde{\alpha}_i$ 指 α_i 的模算子)

$$\tilde{\alpha}_{i\,x \to y} f(x, x_1, \cdots, x_r) \leqslant g(t_i, \max(y, x_1, \cdots, x_n)),$$

則 $g(t, x)$ 称为函数集 Δ 的**副控制函数**. 如果对于每个固定的 t，

$g(t,x)$ 恒属于 $\varDelta$，则 $\{g(t, x)\}$ $(t=0, 1, \cdots)$ 称为 $\varDelta$ 的**副控制骨干**.

定理 3 設 $\{g_i(x)\}$ 为函数集 $\varDelta$ 的副控制骨干，并且 $\varDelta$ 为由开始函数經过迭置及若干算子 $\alpha_1, \cdots, \alpha_h$ 而作成的；今以原开始函数、函数 max 及 $g_0, g_1, \cdots, g_i$ 为开始函数，經过迭置及加限算子 $\hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_h$ 作成的函数集記为 $\nabla^{(i)}$，則 $\varDelta$ 等于諸 $\nabla^{(i)}$ 的并集，卽

$$\varDelta=\bigcup_i \nabla^{(i)}=\nabla^{(0)}+\nabla^{(1)}+\nabla^{(2)}+\cdots.$$

証明 每个 $\nabla^{(i)}$ 的开始函数在 $\varDelta$ 中，而 $\varDelta$ 又对迭置及加限算子 $\hat{\alpha}$ 封閉，故知任一 $\nabla^{(i)}$ 均包含于 $\varDelta$ 中，从而

$$\bigcup_i \nabla^{(i)} \subseteq \varDelta.$$

在 $\varDelta$ 中任取一函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$，它必有一个定义过程. 設其定义过程为 $f_0, f_1, \cdots, f_m(=f)$，其中使用 k 次算子 α；并設每次使用算子 α 时，相应的模 $\leqslant g_{v_i}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ (因 $\{g_t(x)\}$ 为副控制骨干). 取 $s=\max\limits_{i\to k}(v_i)$，今証 f 必在 $\nabla^{(s)}$ 中.

f_0 必为 $\varDelta$ 的开始函数，故在每一 $\nabla^{(i)}$ 中，从而也在 $\nabla^{(s)}$ 中.

今設 $f_0, f_1, \cdots, f_{i-1}$ 均在 $\nabla^{(s)}$ 中，而来討論 f_i.

如果 f_i 为开始函数，由上所知，它在 $\nabla^{(s)}$ 中.

如果 f_i 为由前面的若干个 f 經迭置而作成，依归納假設，前面的若干 f 均在 $\nabla^{(s)}$ 中，又因 $\nabla^{(s)}$ 对迭置封閉，故 f_i 必在 $\nabla^{(s)}$ 中.

如果 f_i 为由前面一个 f_t 經算子 α 作成，則有

$$f_i=\underset{y\to x_r}{\alpha} f_t(x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}, y);$$

而 $\underset{y\to x_r}{\alpha}$ 之模 $\leqslant g_{v_i}(\max(x_1, \cdots, x_r))$ (暫記为 w)，故得

$$f_i=\underset{y\to(w, x_r)}{\hat{\alpha}} f_t(x_1, \cdots, x_{r-1}, y).$$

依归納假設，f_t 在 $\nabla^{(s)}$ 中；又因 g_{v_i} 及 max 在 $\nabla^{(s)}$ 中(因 $v_i\leqslant s$)，而 $\nabla^{(s)}$ 对加限算子 $\hat{\alpha}$ 封閉，故 w 因而 f_i 也在 $\nabla^{(s)}$ 中.

依数学归納法，$f_m=f$ 必在 $\nabla^{(s)}$ 中. 但 f 为 $\varDelta$ 中任一函数，故知

$$\varDelta\subseteq\bigcup_i \nabla^{(i)}.$$

合并上两結果，得

$$\varDelta=\bigcup_{i}\nabla^{(i)}.$$

定理得証.

一般說来，加限算子均为初等算子. 因此，一般地說，合乎定理 3 的条件的递归生成集均可分解为初等函数集的并集.

当 α 为原始递归式时（这时副控制函数和控制函数同），可以很簡单地作出控制骨干 $\{g_i\}$，而 $\nabla^{(i)}$ 也可很簡单地取 g_i 为开始函数（无須兼取 $g_0, \cdots, g_{i-1}$ 及 max 为开始函数）. 其詳細內容今不贅述，讀者可自行探求.

习　題

1. 把本节中未詳細証明的定理給予詳細証明.

2. 具体指出：为什么以前对各級初等函数集所找的控制函数的方法是这里找控制函数方法的特例.

3. 試作初基函数集、各級初等函数集和原始递归函数集的控制骨干.

4. 初等函数集有无副控制骨干？为什么？

5. 試証：原始递归函数集的副控制骨干即为其控制骨干.

§2　递归生成函数集的枚举

定义　設 $\varDelta_n$ 为 n 元函数集，如果有一个 $n+1$ 元的函数 $g(t, x_1, \cdots, x_n)$，使得：函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 属于 $\varDelta_n$ 当且仅当至少有一数 t_0 滿足

$$f(x_1, \cdots, x_n)=g(t_0, x_1, \cdots, x_n),$$

則 g 称为 $\varDelta_n$ 的**枚举函数**，t_0 称为在枚举函数 g 之下 f 的**編号**.

按照上述定义，枚举函数 g 必須具备两条件. 第一，枚举无遺，即 $\varDelta_n$ 中的函数恒可表成 $g(t_0, x_1, \cdots, x_n)$ 之形；第二，不多枚举，即任取一自然数 t_0，則 $g(t_0, x_1, \cdots, x_n)$ 必在 $\varDelta_n$ 中，亦即不会枚举 $\varDelta_n$ 以外的函数. 有好些书上只要求第一个条件，并不要求第二个条件，讀者必須注意这两定义的区別.

当然,对枚举函数的定义尽可有所不同,但作者觉得,定义作只满足第一个条件的"枚举函数"是不大合用的．这时,任何函数集的枚举函数都极易找出：把一切公式（或把字母的一切有限序列）加以枚举便成了．因为任何 Δ_n 的函数均可表成字母的有限序列,因而迟早必被枚举到,但不能保証所枚举的皆是 Δ_n 中的函数．的确,所枚举的有 Δ_n 以外的函数,有不是函数的数学对象,甚至有毫无意义的符号系列．試問,这样的枚举函数有何用处呢？因此应該要求枚举函数 g 在枚举时旣沒有遺漏，也不参杂有"不相干"的东西．

但是,这里幷不要求：每个函数只被枚举一次．換言之,对 Δ_n 中每个 $f(x_1, \cdots, x_n)$,要求至少有一数 t_0 使得

$$f(x_1, \cdots, x_n)=g(t_0, x_1, \cdots, x_n),$$

但很可能还有其他的数满足此关系，甚至可能有无穷多个这样的数(卽 f 可被枚举无穷多次)．这是可容許的．

表面看来，似乎 Δ_n 的枚举函数将随 n 的变化而大大改变，但实际上却幷非如此．

定理 1 如果函数集 Δ 含有配对函数 pg、K、L，则对于任給两正整数 m、n，Δ_m 的枚举函数与 Δ_n 的枚举函数恒可彼此定义．

証明 只須証明，对任何正整数 n 說来，Δ_n 的枚举函数恒可与 Δ_1 的枚举函数互相定义．

設 Δ_n 的枚举函数为 $g(t, x_1, \cdots, x_n)$，而 Δ_1 的枚举函数为 $h(t, x)$；如果 g 已經作出,今作 h 如下：在 Δ_1 内任取一函数 $f(x)$，则 $f(I_{nn}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 必是 Δ_n 内的函数,故应有 t_0 使

$$f(I_{nn}(x_1, x_2, \cdots, x_n))=g(t_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n),$$

故

$$f(x)=f(I_{nn}(0, 0, \cdots, 0, x))=g(t_0, 0, \cdots, 0, x).$$

故 h 可由 g 而定义,卽 $h(t, x)=g(t, 0, \cdots, 0, x)$.

反之，設 h 已作出，则 g 可如下作出：在 Δ_n 内任取一函数

$f(x_1, \cdots, x_n)$，则 $f'(x)=f(LK^{n-1}x, LK^{n-2}x, \cdots, LKx, Lx)$ 必是 $\varDelta_1$ 内的函数，故应有 t_0 使

$$f'(x)=h(t_0, x).$$

但

$$f(x_1, \cdots, x_n)=f'pg^n0x_1\cdots x_n,$$

故得

$$f(x_1, \cdots, x_n)=h(t_0, pg^n0x_1\cdots x_n).$$

所以取 $g(t, x_1, \cdots, x_n)=h(t, pg^n0x_1\cdots x_n)$ 即可. 定理得証.

由这定理可見，对于任何一个 n，只要把 $\varDelta_n$ 的枚举函数研究清楚了，则别的 $\varDelta_m$ 的枚举函数也容易得到了. 当然以 $\varDelta_1$ 的枚举函数为最易研究，也最値得研究.

上面定义的枚举函数是只就变元个数相同的函数集而論的. 当然，如果各函数的变元个数不同，但最多只有 n 元，则(引入广义么函数后) 可把各函数都看作 n 元函数，从而仍可当作 n 元函数集看待而加以枚举. 但各函数的变元个数沒有上界时，这种(引入广义么函数的) 办法行不通，这时似乎可能該函数集沒有枚举函数. 实际上不然，只要引入配对函数，仍可定义出它的枚举函数. 于是引入下列的定义:

定义 設有一函数集 $\varDelta$ 及一函数 $g(t, x)$，如果任一 n 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 之属于 $\varDelta$ 当且仅当有 t_0 使得

$$f(x_1, \cdots, x_n)=g(t_0, pg^n0x_1, \cdots, x_n),$$

则 g 叫做**函数集 $\varDelta$ 的枚举函数**，而 t_0 叫做在枚举函数 g 之下 n 元函数 f 的**編号**.

注意: 这个函数实即 $\varDelta_1$ 的枚举函数.

定理 2 集 $\varDelta$ 中的函数处处有定义当且仅当集 $\varDelta$ 的枚举函数 $g(t, x)$ 是处处有定义的.

証明 既然对每个 t，$g(t, x)$ 均属于 $\varDelta$，因而对每个 x 均有定义，即对每組 (t, x)，g 均有定义，必要性得証. 至于充分性也是显

然的. 于是定理得証.

定理 3 如果函数集 Δ 含有本原函数, 对迭置封閉, 其中各函数处处有定义, 則 Δ 的枚举函数 $g(t, x)$ 本身及 $Ng(t, x)$ (作为二元函数) 均不可能属于 Δ.

証明 Δ 的枚举函数 $g(t, x)$ 显然处处有定义. 如果它(作为二元函数言) 又属于 Δ, 因 Δ 中有后继函数 (它是本原函数之一) 且对迭置封閉, 故 $g(t, x)+1$ 也属于 Δ; 再作迭置, $g(x, x)+1$ 也属于 Δ, 从而属于 Δ_1. 同理, 如 $Ng(t, x)$ 属于 Δ, 則 $Ng(x, x)$ 也属于 Δ_1. 因 $g(t, x)$ 同时又为 Δ_1 的枚举函数, 故必有 t_0 及 t_1, 使得

$$g(t_0, x)=g(x, x)+1,$$

$$g(t_1, x)=Ng(x, x).$$

今令 $x=t_0$ 及 $x=t_1$, 因 $g(t,x)$ 处处有定义, 即得矛盾. 故知 $g(t,x)$ 及 $Ng(t, x)$ 不可能属于 Δ. 定理得証.

根据定理 2 和定理 3, 立即推得:

定理 4 对于包含初基函数集的函数集 Δ (如初基函数集、各級初等函数集、原始递归函数集以及一般递归函数集) 說来, 其枚举函数 $g(t, x)$ 以至 $g(x, x)$ 不可能是准 Δ 集函数

特别重要的是下列的特例:

定理 5 一般递归函数集的枚举函数, 作为二元函数, 不可能是一般递归函数; 亦即这个函数集不可能用一般递归函数来枚举.

証明 如果它有枚举函数, 則該枚举函数必是处处有定义的, 其次, 这个函数集是含有迭置及本原函数的, 故其枚举函数必不能属于該集本身, 即必不能是一般递归函数, 从而定理得証.

注意: 半递归函数集的枚举函数却可以是半递归函数. 讀者試述其理由.

这样, 可以很容易地便把这条非常重要的定理証明出来了 (其重要性到下面討論判定問題时可以知道).

不过, 定理 5 还只是消极的結果, 它只断定沒有什么什么性质

的枚举函数．会不会根本沒有枚举函数呢？定理5对此并未回答．同样，对于其他各种函数集也可发生同样的問題．

下面将証明：对于相当广泛的一类函数集說来，其枚举函数是存在的，而且一般說来，該枚举函数还是很容易求出的．

定理6 如果 Δ 是递归生成的函数集，含有配对函数 pg、K、L，那么 Δ 的枚举函数 $g(t, x)$ 必存在，且可用含有它的生成算子 α 的参数变异的单重递归式来定义它．

証明 由上所論，$g(t, x)$ 也就是 Δ_1 的枚举函数．

我們知道，根据标准生成方式，Δ_1 可以如下組成：

由开始函数 Lx 及某一个 $A(x)$ 出发，經过(1,1)迭置及生成算子 $\underset{y\to x}{\alpha}$ 而作成．这时的枚举函数 $g(t, x)$ 可如下定义：

$$g(t,x)=\begin{cases} Lx, & \text{当 } t=0 \text{ 时},\\ A(x), & \text{当 } t=1 \text{ 时},\\ g\left(K\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], g\left(L\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], x\right)\right), & \text{当 } t\geqslant 2 \text{ 且为偶数时},\\ \underset{y\to x}{\alpha}\, g\left(\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right), & \text{当 } t\geqslant 2 \text{ 且为奇数时}. \end{cases}$$

可以証明：

(1) 任給 t，則 $g(t, x)$ 恒为 Δ_1 中的函数；

(2) 任給 Δ_1 中一函数 $f(x)$，恒有 t 使得 $g(t, x)=f(x)$．

(1)的証明极易．因 $g(0, x)$、$g(1, x)$ 为 Δ_1 中的函数；其次，如果(强归納假設)当 $t\leqslant t_0$ 时 $g(t, x)$ 均为 Δ_1 中的函数，则不論 t_0 为奇或偶，由定义式中第三、四两个式子可知 $g(t_0, x)$ 必为 Δ_1 中的函数，故知对于每一个 t，$g(t, x)$ 作为 x 的函数說来均为 Δ_1 中的函数．

(2)的証明如下：任取 Δ_1 中一函数 $f(x)$．它既是 Δ_1 中的函数，必有一个定义过程．設其定义过程为：

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{n-1}(x), f_n(x)\,(=f(x)).$$

这里的 f_0 必是开始函数，故存在所求的 t(事实上，$t=0$ 或 1)．今

設(强归納假設)由 f_0 直到 f_{i-1} 均存在所求的 t, 再討論 f_i.

如果 f_i 为开始函数,則当然有所求的 t. 如果 f_i 由 (1, 1) 迭置而得到,設

$$f_i=f_s(f_r(x)) \quad (s, r<i),$$

并設(归納假設) $f_s=g(t_s, x)$、$f_r=g(t_r, x)$, 則由 $g(t, x)$ 的定义式中第三式显見:

$$\begin{aligned} g(2pg(t_s, t_r)+2, x) &= g(Kpg(t_s, t_r), g(Lpg(t_s, t_r), x)) \\ &= g(t_s, g(t_r, x)) \\ &= f_s(f_r(x)) = f_i(x). \end{aligned}$$

故可知, 相应于 f_i 的所求的 t 为 $2pg(t_s, t_r)+2$. 如果 f_i 是由算子 α 而得来,設

$$f_i(x) = \underset{y\to x}{\alpha} f_r(y) \quad (r<i),$$

并設(归納假設) $f_r(x)=g(t_r, x)$, 則由 $g(t, x)$ 的定义式中的第四式显見

$$\begin{aligned} g(2t_r+3, x) &= \underset{y\to x}{\alpha} g(t_r, y) \\ &= \underset{y\to x}{\alpha} f_r(x) \\ &= f_i(x), \end{aligned}$$

故知相应于 f_i 的所求的 t 为 $2t_r+3$.

由数学归納法而知,对一切 $i(1\leqslant i\leqslant n)$, 相应于 $f_i(x)$ 均有所求的 t. 从而可知, 对 $f_n(x)(=f(x))$ 也有所求的 t. 故断言 (2) 得証.

从而,上式所定义的函数 $g(t, x)$ 确是 Δ_1 的(因而是 Δ 的)枚举函数. 易見, g 的定义式是以 t 为递归变元的参数变异单重递归式,且其中出現算子 α.

当取 α 为 $\underset{y\to(Kx,0,Lx)}{\widehat{\mathrm{itr}}}$、$\underset{y\to(0,x)}{\mathrm{itr}}$ 及 $\underset{y\to x}{\mathrm{inv}}$ 时, 便可得出各級初等函数集、原始递归函数集、半递归函数集的枚举函数.

特别值得提出的是, 原始递归函数集的枚举函数可如下定义($A(x)$为适当的开始函数):

$$g(t,x)=\begin{cases} Lx, & \text{当 } t=0 \text{ 时}, \\ Ax, & \text{当 } t=1 \text{ 时}, \\ g\left(K\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], g\left(L\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], x\right)\right), & \text{当 } t\geqslant 2 \text{ 且为偶数时}, \\ \underset{y\to(0,x)}{\mathrm{itr}}\, g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right), & \text{当 } t\geqslant 2 \text{ 且为奇数时}. \end{cases}$$

这里，$g(t, x)$ 的定义式是关于 t 的参数变异单重递归式，不过，其中出现的算子 $\underset{y\to(0,x)}{\mathrm{itr}}$ 却作用于被定义的函数 g，而結果所得的 $g(t,x)$ 以及 $Ng(t, x)$ 不再是原始递归函数，而是二重递归函数．足見，对于有算子的递归式，尽管它仍是原始递归的算子，只要不是初等算子，其結果所得的函数却可以越出原始递归函数集以外．讀者可把初基函数集及初等函数集的枚举函数 $g(t, x)$ 的定义式写出，并試証該 $g(t, x)$ 及 $Ng(t, x)$ 均为原始递归函数．

注意：$Ng(t, x)$ 只取 0、1 两值．前面作非初等函数、非原始递归函数时，都是找些增长非常快的控制函数．只有利用了枚举函数，才能够証明：存在只取 0、1 二值的非初等及非原始递归函数．这便显示出这条定理的重要性了．

习　　题

1．作出初等函数集的枚举函数 $g(t, x)$，并証明 $g(t, x)$ 及 $Ng(t, x)$ 均非初等函数．

2．試証正文所定义的原始递归函数集的枚举函数 $g(t, x)$ 是二重递归函数．

3．試作出 n 重递归函数集的枚举函数 $g(t, x)$，証明它为 $n+1$ 重递归函数．

4．对"半递归函数集"同法为之，但証明半递归函数集的枚举函数仍为半递归函数．这与我們的結論有无矛盾？

§3　一般递归函数集的枚举

上节末曾作出一般递归函数集的枚举函数．它能否应用上节

的办法作出呢？对此须作进一步的研究，同时也可对一般递归函数集有进一步的认識．在討論过程中将經常使用上面所获得的結論：一般递归函数集的枚举函数不可能是一般递归函数．

首先，我們知道，一般递归函数集是半递归函数集的子集，因此，在半递归函数集的枚举中，必已枚举尽了一切一般递归函数．如果能够在其中把一般递归函数的編号与非一般递归函数的編号分开，那末就能得到一般递归函数的枚举函数了．

换言之，如果半递归函数集的任一枚举函数为 $g(t, x)$，由一般递归函数的編号必組成一子叙列 $\{h(t)\}$ $(t=0, 1, \cdots)$，这时容易看出，$f(x)$ 是一般递归函数当且仅当有 t_0 使得

$$f(x)=g(h(t_0), x).$$

换言之，$g(h(t), x)$ 便是一般递归函数集的枚举函数．

$g(h(t), x)$ 必須是处处有定义的（因一般递归函数处处有定义），因此，如果 $g(h(t), x)$ 为半递归函数，它必为一般递归函数．这与上面的結論矛盾，故 $g(h(t), x)$ 不能为半递归函数，从而 $h(t)$ 便非半递归函数，更非一般递归函数．因此可得

定理 1 当对半递归函数作枚举时，其中的一般递归函数的編号不可能組成一个递归枚举数列；即不可能存在一般递归函数 $h(t)$，使得一般递归函数的編号恰巧組成数列 $\{h(t)\}$ $(t=0, 1, \cdots)$．

如果对每一 t，$g(t, x)$ 为一般递归函数与否，可以在有限步驟之內判定，那末，对一切 t，恒可在有限步驟內求出 $h(t)$ 之值（讀者試給出求 $h(t)$ 之法），从而 $h(t)$ 便是一般递归函数．因此

定理 2 对半递归函数集的任一个枚举函数 $g(t, x)$ 說来，对每一 t，无法在有限步驟內判定 $g(t, x)$ 是否为一般递归函数．

因此，要想从半递归函数集的枚举函数来作出一般递归函数集的枚举函数，这是很难做到的，至少无法在有限步驟內完成．

注意：定理 2 中的“对每一 t”，不能理解为“当給出一个 t 时”，这两者是有区别的．

下面試仿上节办法直接作出一般递归函数集的"枚举函数".

我們知道，一般递归函数既可定义为："半递归函数中处处有定义的函数称为一般递归函数"，还可定义为"由本原函数出发，經过有限次迭置及一般递归式(其中所用的 $g(x)$ 須归宿于0)而作成".

对于一元一般递归函数集，还可如下作出：

由适当的两函数 Lx、Ax 出发，經过(1, 1)迭置及正常的 $\underset{y\to x}{\text{inv}}$ 而作出．这里所謂"正常的 $\underset{y\to x}{\text{inv}}$"系指滿足下列条件的 inv：

$$\left.\begin{array}{l}\text{必待 } f(y) \text{ 的值穷尽一切自然数}\\ \text{时，才允許使用 } \underset{y\to x}{\text{inv}} \text{ 于 } f(y).\end{array}\right. \qquad (*)$$

下面将根据后面这个作法而直接作一般递归函数集的"枚举函数".

設所求的枚举函数为 $g(t, x)$，仿上节可有如下定义：

$$g(t,x)=\begin{cases} Lx, & \text{当 } t=0 \text{ 时},\\ Ax, & \text{当 } t=1 \text{ 时},\\ g\left(K\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], g\left(L\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], x\right)\right), & \text{当 } t\geqslant 2 \text{ 且为偶数时},\\ \underset{y\to x}{\text{inv}}\, g\left(\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right), & \text{当 } t\geqslant 2 \text{ 且为奇数时}.\end{cases}$$

如按此定义，$g(t, x)$ 便不是处处有定义的；因当 $t\geqslant 2$ 且为奇数、但 $g\left(\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)$ 不滿足(*)时，依上定义，$g(t, x)$ 便无定义．既然 $g(t, x)$ 不是处处有定义，它便不是递归函数集的枚举函数.

要得到一般递归函数集的枚举函数，必須要对 $g(t, x)$ 补充定义，补充方式有两种："粗补"和"細补".

所謂"粗补"，是只要 $g\left(\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)$ 少取一值，即只要有一自然数不在 $g\left(\left[\dfrac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)$ 的值域中，那末根本不把 $\underset{y\to x}{\text{inv}}$ 作用于它，而用另外任意一个一般递归函数(比如 $O(x)$)作为 $g(t,x)$ 之值.

换言之,粗补的方法是:

$$g(t, x)=0, \quad 当\ t\geqslant 2\ 且为奇数但\ g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)不满足(*)时.$$

經过这样"粗补"以后,$g(t, x)$ 是处处有定义了. 但它是否为一般递归函数呢?

定理 3 經过"粗补"后所定义的函数 $g(t, x)$ 是一般递归函数集的枚举函数,从而它决不可能是一般递归函数.

証明 仿上节可証,对于每个 t, $g(t, x)$ 都是一般递归函数(注意:卽使 $t\geqslant 2$ 且为奇数,又 $g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)$不满足(*), $g(t,x)$也仍为一般递归函数).

仿上节又可証,任給一个一元函数 $f(x)$,均有 t_0 使得 $g(t_0, x)=f(x)$. 因为在造一般递归函数时,可以限于只使用正常的 $\operatorname{inv}_{y\to x}$,明白这一点后,易由数学归納法証明本断語. 于是定理得証.

由于这样定义的函数 $g(t, x)$ 决不可能是一般递归函数,故还可推得好些結論.

如果能找出一个一般递归函数 $h(t)$,使得

$$h(t)=0 \quad 当且仅当\ g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)满足(*).$$

那末,由于$h(t)$的値必能在有限步內找出,故能否对 $g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)$ 使用正常的 inv 的問題也能在有限步驟內决定. 这一难点旣能决定,故对每一情形說来,均能在有限步驟內求出 $g(t, x)$ 之値. 因此任給 t、x, 必能在有限步驟內求出 $g(t, x)$, 从而 $g(t, x)$为一般递归函数. 这与本定理的結論矛盾,故知$h(t)$必非一般递归函数. 也卽 $g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right], y\right)$满足(*)与否必不能在有限步驟內决定.

推論 对上面定义的 $g(t, x)$, 不能对每个 t 在有限步驟內决定 $g(t, y)$是否满足(*). 换言之, $\operatorname{inv}_{y\to x}$ 的正常性条件(*)不能就每个 t 在有限步驟內判定.

所謂"細补",其法如下:

任取一数,譬如 0,而补充定义:

$$\text{当}\ f(y)\ \text{不取值}\ x\ \text{时},\ \operatorname*{inv}_{y\to x} f(y)\ \text{指}\ 0.$$

对本情形說来,便是:

$$g(t,\ x)=0,\quad \text{当}\ t\geqslant 2\ \text{且为奇数且}\ g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right],\ y\right)\text{不取值}\ x\ \text{时}.$$

經过"細补"后,显見 $g(t,\ x)$ 亦处处有定义. 但这个 $g(t,\ x)$ 是不是一般递归函数集的枚举函数呢?

定理 4 經过"細补"后所定义的 $g(t,\ x)$ 不是一般递归函数集的枚举函数,也不是一般递归函数.

証明 假如对每个 t,均存在一个一般递归函数 $h_t(x)$ (对 x 为一般递归),使得

$$h_t(x)=0\quad \text{当且仅当}\ g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right],\ y\right)\text{可取值}\ x,$$

那末可在有限步驟内决定 $g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right],\ y\right)$ 能否取值 x,因而可决定 $g(t,\ x)$ 的值究竟是 $\operatorname*{inv}_{y\to x} g\left(\left[\frac{t\dot{-}2}{2}\right],\ y\right)$ 或是 0. 这时,对于任給 t、x,恒可在有限步驟内算出 $g(t,\ x)$ 之值 (因只使用有限多个 $h_t(x)$),故有:

(1) $g(t,x)$ 处处有定义,且(作为二元函数)为一般递归函数;

(2) 从而,对每个 t 說来,$g(t,\ x)$ 为一般递归函数;

(3) 此外,对任何一个一般递归函数 $f(x)$,恒有 t_0,使

$$g(t_0,\ x)=f(x)\quad (\text{理由同上}),$$

因此 $g(t,\ x)$ 便是一般递归函数集的枚举函数,而 $g(t,\ x)$ 本身(作为二元函数)又为一般递归函数.

这与上节的結論相矛盾,故这样的(一般递归函数的) $h_t(x)$ 不可能对每个 t 均存在. 換言之,对某些 t 說来,給出 x 后,当 y 变化时 $g(t,\ y)$ 取值 x 或否,未必可在有限步驟内决定,从而 $g(t,\ x)$ 未必可在有限步驟内算出. 因此,对于这些 t, $g(t,\ x)$ 便不是一般

递归函数，从而 $g(t, x)$ 不可能是一般递归函数集的枚举函数．定理得証．

因此，經过"細补"以后，$g(t, x)$ 既不是一般递归函数，也不是一般递归函数集的枚举函数．

推論 照上述方式所定义的 $g(t, x)$，并不对每个 t、x 均能决定 $g(t, y)$ 取值 x 或否；甚至于有某些 t，使得不能对每个 x 均能决定 $g(t, y)$ 取值 x 或否．

讀者可比較这两种补足法及补足后所得的函数的区別，这将会增进我們对一般递归函数的了解．

习 題

試仿这两节的方法，用下述方式对一般递归函数集加以"枚举"．

1．作 $B(t, x_1, \cdots, x_r, y)$，使得任一一般递归函数 f 均可表成
$$f(x_1, \cdots, x_r)=K \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(n, x_1, \cdots, x_r, y);$$

2．作 $h(t, x)$，使得任一一般递归函数 f 均可表成
$$f(x_1, \cdots, x_r)=Kh(n, pg^r x_1 x_2 \cdots x_r 0);$$

3．作 $h(t, x)$，使得任一一般递归函数 f 均可表成
$$f(x_1, \cdots, x_r)=h(n, pg^r x_1 x_2 \cdots x_r 0).$$

§4 自身枚举与主要自身枚举

上面說过，如果 $\varDelta$ 含有本原函数，其中各函数又是处处有定义的，則其枚举函数不可能属于 $\varDelta$，但如果 $\varDelta$ 中的函数未必处处有定义，則 $\varDelta$ 的枚举函数可能属于 $\varDelta$．半递归函数集的枚举函数便属于半递归函数集．

定义 如果 $\varDelta$ 的一个枚举函数属于 $\varDelta$，則說 $\varDelta$ **可以自身枚举**，而該枚举函数叫做 $\varDelta$ 的一个**自身枚举**．

对于集 $\varDelta$ 的一个枚举函数 $A(n, x_1, \cdots, x_r)$，如果具下述两性质，它便叫做集 $\varDelta$ 的**主要自身枚举**：

(1) A 也属于集 $\varDelta$，亦卽 A 为自身枚举；

(2) 集 Δ 的任何一个自身枚举函数 B 均可**一般递归地化归于** A，也即恒有一个一般递归函数 $\varphi(n)$，使得

$$A(\varphi(n), x_1, \cdots, x_n) = B(n, x_1, \cdots, x_n).$$

定理 1 設含有 $x+y$、xNy 的函数集 Δ 有一个自身枚举 $A(n, x_1, \cdots, x_r)$，則它为主要自身枚举当且仅当对 Δ_{r+1} 中每一个函数 f，均有一个一般递归函数 $\varphi(n)$，使得

$$A(\varphi(n), x_1, \cdots, x_r) = f(n, x_1, \cdots, x_r).$$

証明 充分性是很显然的，因为 Δ 的任何自身枚举均为 Δ_{r+1} 中的函数，对这些枚举，既然都有相应的一般递归函数 φ，依定义即知 A 是主要自身枚举.

今証必要性. 設 A 为主要自身枚举，又設 f 为 Δ_{r+1} 中任意一个函数，今定义一函数 g 如下：

$$g(n, x_1, \cdots, x_r) = \begin{cases} f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right], x_1, \cdots, x_r\right), & \text{当 } n \text{ 为偶时}, \\ A\left(\left[\dfrac{n \dot{-} 1}{2}\right], x_1, \cdots, x_r\right), & \text{当 } n \text{ 为奇时}. \end{cases}$$

显然，g 也是 Δ 的一个自身枚举. 因 A 为主要自身枚举，故应有一个一般递归函数 φ，使得

$$A(\varphi(n), x_1, \cdots, x_r) = g(n, x_1, \cdots, x_r).$$

因而

$$\begin{aligned} A(\varphi(2n), x_1, \cdots, x_r) &= g(2n, x_1, \cdots, x_r) \\ &= f(n, x_1, \cdots, x_r). \end{aligned}$$

足見，利用一般递归函数 $\varphi(2n)$ 后，可把 f 化归于 A. 必要性得証. 定理証毕.

f 只是 Δ_{r+1} 中的任何一个函数，因而 $f(n, x_1, \cdots, x_r)$ 只枚举了集 Δ 中的一个子集. 这定理証明了：不但 Δ 的自身枚举函数可以一般递归地化归于主要自身枚举 A，連只枚举了 Δ 的子集的任意一个 Δ_{r+1} 中函数 f 也可一般递归地化归于主要自身枚举 A. 利用配对函数，还可証明：Δ_{r+1} (任意 r) 中任意一个函数也可一般

递归地化归于主要枚举 A. 讀者試自証之.

主要枚举是否存在呢? 这是一个关鍵性的問題, 是今后某些討論的主要根据. 回答是肯定的.

定理 2 如果集 Δ 有自身枚举, 且有一一对应的配对函数, 則 Δ 至少有一个主要自身枚举.

証明 設集 Δ 有一个自身枚举函数(未必是主要的) $h(n, x)$. 今取具一一对应的配对函数組 pg、K、L, 因而 $pg^{r+1}x_0x_1\cdots x_r$ 与 K^r, LK^{r+1}, $\cdots$, LK, L 也是一一对应的, 利用这些配对函数, 每个矢量 $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ 必有一編号, 而每一数也必是某个矢量的編号. 今証下函数

$$A(n, x_1, \cdots, x_r)=h(Kn, pg^{r+1}(Ln)x_1x_2\cdots x_r) \tag{1}$$

便是 Δ 的一个主要自身枚举.

首先, 因为 h、K、L 及 pg 均在 Δ 中, 故知 $A(n, x_1, \cdots, x_r)$ 也在 Δ 中.

其次, 任取 Δ_{r+1} 中一个函数 $f(n, x_1, \cdots, x_r)$, 則下函数

$$g(u)=f(K^ru, LK^{r-1}u, LK^{r-2}u, \cdots, LKu, Lu) \tag{2}$$

必在 Δ_1 中, 故应被 $h(n, x)$ 所枚举. 即存在 n_0 使得

$$g(x)=h(n_0, x). \tag{3}$$

又因

$$f(n, x_1, \cdots, x_r)=g(pg^{r+1}nx_1\cdots x_r), \tag{4}$$

故有

$$\begin{aligned}
&A(pg(n_0, n), x_1, \cdots, x_r)\\
&\quad=h(Kpg(n_0, n), pg^{r+1}(Lpg(n_0, n))x_1x_2\cdots x_r) && \text{(根据(1)式)}\\
&\quad=h(n_0, pg^{r+1}nx_1\cdots x_r)\\
&\quad=g(pg^{r+1}nx_1\cdots x_r) && \text{(根据(3)式)}\\
&\quad=f(n, x_1\cdots x_r). && \text{(根据(4)式)}
\end{aligned}$$

故知, 利用 $pg(n_0, n)$ 即可把 f 化归于 A. 因 f 为 Δ_{r+1} 中任意一个函数, 故由定理 1 知 A 为主要自身枚举. 定理得証.

习 题

1．試証：集 Δ_{r+1}（任意 r）中任意一个函数可以一般递归地化归于集 Δ 的主要自身枚举．

2．上面所作的关于半递归函数集的枚举函数是否是主要自身枚举？

第七章　謂詞与集合

§1 各种謂詞

下面将对謂詞作比較深入的研究.这样,一方面可对递归函数有进一步的认識,另一方面又可看到递归函数的一个重要的应用.

这里先綜述以前的定义.

定义　如果謂詞 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 的特征函数 $\mathrm{ct}\,A(x_1, \cdots, x_r)$ 为初基、初等、原始递归、一般递归函数，則 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 便相应地称为**初基**、**初等**、**原始递归**、**一般递归謂詞**.

注意:如果一謂詞的特征函数为半递归函数,則該半递归函数必是一般递归函数(故对半递归謂詞須另作定义,見§4).

下面再引入一类新的謂詞，还有若干新謂詞将在以后再行引入.

定义　由本原函数、加法和乘法出发,經过有限次迭置所作成的函数叫做**多項式**.　如果 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 和 $B(x_1, \cdots, x_r)$ 为两个多項式,則 $A(x_1, \cdots, x_r)=B(x_1, \cdots, x_r)$ 叫做**多項式謂詞**.　多項式謂詞冠以受限量詞后叫做**新初基謂詞**.

各謂詞之間的关系是:

{多項式謂詞,初基謂詞}⊆新初基謂詞⊆初等謂詞

⊂原始递归謂詞⊂一般递归謂詞

(上述关系的証明将見于下两节).

本章的下面几节将討論各謂詞集对于命題联結詞及量詞的封閉性.在討論命題联結詞时,只討論“非”、“或”、“且”三者,因为別的命題联結詞(如“蘊涵”、“等价”等等)皆可由“非”、“或”、“且”三者表示出来;关于量詞，我們将分别受限或否，从而共有四个量詞

(受限存在量詞、不受限存在量詞、受限全称量詞、不受限全称量詞). 在討論时下定理是很有用的，凡由下定理可推出的結論，以后将不再列举了.

定理 如 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 为某某謂詞(限于上面提及的各类)，而 $f_i(y_1, \cdots, y_s)$ 为相应的函数，則

$$A(f_1(y_1, \cdots, y_s), \cdots, f_r(y_1, \cdots, y_s))$$

仍与原謂詞 A 属于同一謂詞集.

注意：所謂"相应"是指：多項式謂詞与多項式函数相应，初基謂詞与初基函数相应，等等.

其証明是不难得到的，只須注意其特征函数卽可.

习 題

1. 詳細写出本节的定理的証明.

2. 以多項式为特征函数的謂詞是否是多項式謂詞？多項式謂詞是否限于以多項式为特征函数的謂詞？

3. 对所列举的各类謂詞(除多項式謂詞尙未討論外)說来，它們对命題联結詞是否封閉？对受限量詞是否封閉？对不受限量詞是否封閉？

§2 多項式謂詞

定义 凡能表成 $A=B$(A、B 为多項式)形的謂詞卽称为**多項式謂詞**.

不能把以多項式函数为特征函数的謂詞叫做多項式謂詞. 因为，要表示多項式謂詞 $A=B$，需要使用 $N^2(A \dot{-} B)$ 或 $\mathrm{eq}(A, B)$，而它們却非多項式函数. 事实上，也找不出一个多項式，它为 0 当且仅当两多項式 A 与 B 相等.

定理 1 多項式謂詞对"或"、"且"两联結詞封閉；对全称量詞(受限或否)封閉；但对"否定"、不受限存在量詞則不封閉(对受限存在量詞是否封閉尙不明确).

証明 設有两多項式謂詞 $P_1=Q_1$ 和 $P_2=Q_2$，則

(1) $P_1=Q_1$ 或 $P_2=Q_2$

等价于 $(P_1-Q_1)\cdot(P_2-Q_2)=0$,

等价于 $P_1P_2+Q_1Q_2-Q_1P_2-P_1Q_2=0$,

等价于 $P_1P_2+Q_1Q_2=P_1Q_2+P_2Q_1$.

(2) $P_1=Q_1$ 且 $P_2=Q_2$

等价于 $(P_1-Q_1)^2+(P_2-Q_2)^2=0$,

等价于 $P_1^2-2P_1Q_1+Q_1^2+P_2^2-2P_2Q_2+Q_2^2=0$,

等价于 $P_1^2+Q_1^2+P_2^2+Q_2^2=2P_1Q_1+2P_2Q_2$.

再設 $P_1=\sum\limits_{k\to r}a_kx^k$ 和 $Q_1=\sum\limits_{k\to r}b_kx^k$ (a_k、b_k 可含有別的变元),則

(3) $\forall x(P_1=Q_1)$

等价于 $\forall x(\sum\limits_{k\to r}a_kx^k=\sum\limits_{k\to r}b_kx^k)$,

等价于 $\mathop{\forall}\limits_{k\to r}(a_k=b_k)$,

等价于 $\sum\limits_{k\to r}(a_k-b_k)^2=0$,

等价于 $\sum\limits_{k\to r}(a_k^2+b_k^2)=\sum\limits_{k\to r}2a_kb_k$.

(4) $\mathop{\forall}\limits_{x\to y}(P_1=Q_1)$

等价于 $\mathop{\forall}\limits_{x\to y}(\sum\limits_{k\to r}a_kx^k=\sum\limits_{k\to r}b_kx^k)$,

等价于 $\mathop{\forall}\limits_{x\to y}(\sum\limits_{k\to r}(a_k-b_k)x^k=0)$,

等价于 $\sum\limits_{x\to y}(\sum\limits_{k\to r}(a_k-b_k)x^k)^2=0$,

等价于 $\sum\limits_{x\to y}\sum\limits_{k\to 2r}c_kx^k=0$ (适当的 c_k),

等价于 $\sum\limits_{k\to 2r}c_k(\sum\limits_{x\to y}x^k)=0$,

等价于 $\sum\limits_{k\to 2r}c_k\sum\limits_{t\to k+1}d_{tk}y^t=0$;

这里 d_{tk} 为有理数,設其各分母的最小公倍数为 d,則又

等价于 $\sum\limits_{k\to 2r}\sum\limits_{t\to k+1}dc_kd_{tk}y^t=0$,

再把带負号的項移至等号右边,便得

等价于 $P_1' = Q_1'$.

所以,关于"或"、"且"及全称量詞的封閉性得証.

如果对"否定"封閉,則对不受限存在量詞也封閉,它将包括一般递归謂詞,以后将証这一点是不可能的. 从而定理得証.

由上面的討論可見,多項式函数与多項式謂詞之間的关系呈現很多特点:

第一,多項式謂詞虽可表成 $P=Q$ 形(P、Q 为多項式),但其特征函数却未必是多項式.

第二,多項式謂詞对"否定"詞不封閉,但对全称量詞(受限或否)却封閉,这是出乎意外的.

由于这两点,以致在討論多項式謂詞时,往往感到不方便. 不妨采用下法加以修改.

定义 由本原函数及 $x+y$、$x\cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$ 出发,經过迭置而作成的函数叫做**伪多項式**(試与迭置于 $x \dot{-} y$、$\left[\frac{x}{y}\right]$ 的函数相比較). 以伪多項式为特征函数的謂詞叫做**伪多項式謂詞**.

定理 2 凡多項式都是伪多項式,凡多項式謂詞都是伪多項式謂詞(讀者自証).

定理 3 伪多項式謂詞对命題联結詞封閉,但对任何量詞(受限或否)都未必封閉.

証明 伪多項式含有 $x+y$、$x\cdot y$,故对"且"、"或"封閉,又因

$$Nx = \mathrm{eq}(\mathrm{eq}(x, 0), 1),$$

故对"否定"詞也封閉.

由于加入了 $\mathrm{eq}(x, y)$,对(不)受限全称量詞便未必封閉了. 对多項式說来,有"$f(x)=0$ 当且仅当各系数全为 0",但对伪多項式說来这不成立,因为有"$xNx=0$"而其系数非 0.

由这两定理可見:伪多項式的引入是有好处的(当然,多項式本身絕不因而失却重要性).

順便提一句,还可仿前那样引入(伪)**多項式于** $A_1, \cdots, A_h$ **的函数**(謂詞)、**准**(伪)**多項式于** $A_1, \cdots, A_h$ **的函数**諸概念,并推导出相应的定理. 例如 $x \dot{-} y$ 似乎不是伪多項式,但却是准多項式函数,因

$$z = x \dot{-} y \quad \text{当且仅当} \quad x = z + y \vee y = z + x.$$

对于准(伪)多項式函数,还有待进一步的研究.

习　　題

1. 判定下列謂詞是否多項式謂詞; 如是, 試表示为多項式謂詞

(1) $x + y\,\mathrm{eq}(x, z) + xz\,\mathrm{eq}(x+z, y) = 0$;

(2) $x(y \dot{-} z) + ((x+z) \dot{-} y)(y \dot{-} x) = 0$;

(3) $x(y \dot{-} z) + (z \dot{-} (x+y)) = 0$.

2. 受限量詞似应該比不受限量詞为弱. 能否由多項式謂詞集对不受限全称量詞封閉而断定它对受限全称量詞封閉?

3. 多項式謂詞集旣对不受限全称量詞封閉,能否从而断定: 对多項式謂詞任意加若干个不受限全称、存在量詞, 均可表成对多項式謂詞加若干个不受限存在量詞?

§3 新初基謂詞

无論多項式謂詞或伪多項式謂詞,对受限量詞都不封閉(至少对受限存在量詞便不封閉), 因此, 推广这两概念看来是必要的.

定义 在(伪)多項式謂詞前面冠以受限量詞后, 所得的謂詞叫做**受限量詞化的**(**伪**)**多項式謂詞**.

定义 由(伪)多項式出发, 經算子 $\min_{x \to n} N$ 所作成的函数, 叫做**受限量詞化的**(**伪**)**多項式**.

看来, 受限量詞化多項式謂詞的特征函数并非受限量詞化多項式,后者似只包含很少的函数,看来不值得特別研究. 讀者可自証明, 受限量詞化多項式謂詞与受限量詞化伪多項式謂詞是一致的. 因此討論中不妨即以受限量詞化伪多項式謂詞为主.

下面专討論受限量詞化伪多項式函数及謂詞，并省称为**新初基函数**及**新初基謂詞**.

定理 1 新初基謂詞的特征函数必是新初基函数(讀者自証).

定理 2 新初基謂詞对命題联結詞和受限量詞是封閉的.

証明 新初基謂詞均呈$(\alpha)P$形，而(α)为受限量詞的組合，P为伪多項式. 今証这样的謂詞經过命題联結詞及受限量詞后仍呈同样的形式.

設有两謂詞$(\alpha)P$及$(\beta)Q$，先改写約束变元，使得(α)及(β)中的約束变元均不相同. 試用(α')及(β')来表示如下的量詞：把(α)及(β)中的“$\forall$”“$\exists$”互相对調后所成的量詞(可叫做$(\alpha)(\beta)$的**对偶量詞**). 这时有：

$$\overline{(\alpha)}P=(\alpha')\overline{P},$$

$$(\alpha)P\vee(\beta)Q=(\alpha)(\beta)(P\vee Q),$$

$$(\alpha)P\wedge(\beta)Q=(\alpha)(\beta)(P\wedge Q).$$

由于伪多項式对命題联結詞封閉，显見新初基謂詞对命題联結詞亦封閉. 至于新初基謂詞对受限量詞封閉是显然的. 定理得証.

注意：新初基謂詞对不受限量詞的封閉性今尚不明，但看来很可能是不封閉的.

对于新初基函数及謂詞，也可仿前那样引入新初基于$A_1, \cdots, A_h$的函数及謂詞、准新初基于$A_1, \cdots, A_h$的函数，并可仿前那样討論，这里不予贅述.

下面将初基函数与新初基函数作一比較.

看来，$P=Q$并非初基謂詞(P、Q为多項式)，因此，初基謂詞并不包含多項式謂詞(更不会包含新初基謂詞)，但是可証下述結果.

定理 3 初基謂詞都是受限量詞化多項式謂詞，从而都是新初基謂詞.

証明 其实，只須証明：如果$f(x_1, \cdots, x_n)$为初基函数，則

$y=f(x_1, \cdots, x_n)$必为受限量詞化多項式謂詞(新初基謂詞).

奠基： 当 f 为开始函数时，如 f 为本原函数则显然，对于差商函数，則：

$$y=x_1 \dot{-} x_2 \quad \text{当且仅当} \quad x_1=x_2+y \vee \underset{u\to x_2}{\exists}(x_2=x_1+u \wedge y=0),$$

$$y=\left[\frac{x_1}{x_2}\right] \quad \text{当且仅当}$$

$$(x_2=0 \wedge y=0) \vee \underset{u\to x_2}{\exists}\ \underset{v\to x_2}{\exists}(x_1=x_2y+v \wedge x_2=u+v+1).$$

故奠基部分得証.

归納： 如果 f 由算子 $\underset{x\to n}{\max} N^2$ 作出，設

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\underset{t\to x_1}{\max} N^2A(t, x_2, \cdots, x_n),$$

則

$$y=f(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{当且仅当}$$

$$\underset{t\to x_1}{\forall} A(t, x_2, \cdots, x_n)=0 \wedge y=0 \vee \cdot \underset{t\to x_1}{\exists} A(t, x_2, \cdots, x_n) \neq 0 \wedge y=1.$$

依归納假設，$A=0$ 为新初基謂詞，而后者又对命題联結詞及受限量詞封閉，显見 $y=f(x_1, \cdots, x_n)$ 可表成新初基謂詞.

如果 f 由迭置作成，設 $f=A(B_1, \cdots, B_m)$. 我們知道，初基函数都是零級初等函数，故对各 B_i，有一数 h 使得

$$B_i(x_1, \cdots, x_n) \leqslant x_1+\cdots+x_n+h \quad (\text{右端暂記为 } u).$$

于是有：

$$y=f(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{当且仅当}$$

$$\underset{t_1\to u}{\exists} \cdots \underset{t_n\to u}{\exists}(y=A(t_1, \cdots, t_n) \wedge t_1=B_1 \wedge \cdots \wedge t_n=B_n).$$

依归納假設，$y=A$, $t_i=B_i$ 均可表成新初基謂詞，后者又对命題联結詞及受限量詞封閉，$y=f(x_1, \cdots, x_n)$ 显然亦可表成这种謂詞.

依数学归納法，定理得証.

还可从另一方面刻划初基謂詞及新初基謂詞.

定义 由本原函数以及 $A_1, \cdots, A_h$ 出发，經迭置及受限摹状式 $\underset{x\to n}{\mathrm{rti}}$ 而作成的函数叫做**受限摹状于 $A_1, \cdots, A_h$ 的函数**. 以受限

摹状函数为特征函数的謂詞叫做**受限摹状謂詞**.

定理 4 新初基謂詞恰巧和受限摹状于$x+y$、$x\cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$的謂詞相一致,亦即恰巧是二級副初等謂詞.

証明 容易驗証,伪多項式謂詞是受限摹状于$x+y$、$x\cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$的謂詞,而受限摹状于$x+y$、$x\cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$的謂詞又对命題联結詞及受限量詞封閉(讀者可自証),故新初基謂詞包含于受限摹状于$x+y$、$x\cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$的謂詞.

反之,今証任一受限摹状于$x+y$、$x\cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$的函数$f(x_1, \cdots, x_n)$都是准新初基函数,即$z=f$必是新初基謂詞.

如果f为开始函数,这是显然的.

如果f由受限摹状式作成,設$f(x_1, \cdots, x_n)=\underset{y\to x_1}{\mathrm{rti}}\, A(y, x_2, \cdots, x_n)$,則有

$$z=f(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{当且仅当}$$

$$\underset{y\to x_1}{\forall}(A(y, x_2, \cdots, x_n)\neq 0)\wedge z=x_1\cdot\vee\cdot A(z, x_2, \cdots, x_n)=0$$
$$\wedge \underset{y\to z}{\forall}(y=z\vee A(y, x_2, \cdots, x_n)\neq 0).$$

易見$z=f$为新初基謂詞.

如果f由迭置作成,設$f(x_1, \cdots, x_n)=A(B_1, \cdots, B_m)(x_1, \cdots, x_n)$.因受限摹状于$x+y$、$x\cdot y$、$\mathrm{eq}(x, y)$的函数必是二級初等函数,故对各$B_i$必有一数$h$,使

$$B_i(x_1, \cdots, x_n)\leqslant(x_1+\cdots+x_n+2)^h \quad (\text{右端暂記为 } u).$$

从而

$$z=f(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{当且仅当}$$

$$\underset{t_1\to u}{\exists}\cdots\underset{t_n\to u}{\exists}(z=A(t_1, \cdots, t_n)\wedge t_1=B_1\wedge\cdots\wedge t_n=B_n).$$

依归納假設,$z=A$、$t_i=B_i$都是新初基謂詞,从而易見$z=f$亦是新初基謂詞.

依数学归納法,定理得証.

注意:由本定理的証明还可看出:受限摹状于$x+y$、$x\cdot y$、

eq(x, y)的函数(二級副初等函数)必是准新初基函数.

定理 5 初基謂詞恰与受限摹状于 $x \dot{-} y$、$\left[\frac{y}{x}\right]$ 的謂詞相一致. (証明仿前.)

仿上面的証明,还可推广而得下述定理.

定理 6 設 A 为递增函数,且对各 $A_1, \cdots, A_h$,均有一数 t_i,使得

$$A_i \leqslant \underset{t \to t_i}{\mathrm{itr}}\, A(x_1, \cdots, x_r, t) \quad (1 \leqslant i \leqslant h)$$

成立,則受限摹状于 $A_1, \cdots, A_h$、$x+y$、$x \cdot y$、eq(x, y)的謂詞必是新初基于 A 的謂詞. 如果 A 又是受限摹状于 $A_1, \cdots, A_h$ 的函数,則两类謂詞便一致.

讀者自行証之.

习 题

1. 将本节未証的定理詳細証明之.
2. 試考察受限量詞化多項式謂詞与新初基謂詞,并証它們是一致的.

§4 半递归謂詞

初基謂詞对不受限存在量詞及全称量詞不封閉, 这就引进了如下两个新的概念. 把初基謂詞冠以任意有限多个存在量詞(全称量詞)的結果叫做**存在化(全称化)初基謂詞**. 存在化初基謂詞又叫做**半递归謂詞**或**部分递归謂詞**.

这时,在前面所冠的任意有限多个存在量詞恒可并而为一,即有下述的結果.

定理 1 一謂詞为半递归謂詞(全称化初基謂詞)当且仅当它可表成 $\underset{x}{\exists} A(x_1, \cdots, x_r, x)$之形($\underset{x}{\forall} A$之形),而 $A(x_1, \cdots, x_r, x)$ 为初基謂詞.

証明 充分性是显然的, 可由定义直接得出. 下面来証明必要性. 設有一个半递归謂詞 P, 它表成

$$P \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_r B(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s),$$

而 B 为初基謂詞. 取配对函数組 pg、K、L, 使得下列三关系式 $z = pg(x, y)$, $y = Kx$, $y = Lx$ 均为初基謂詞. 命 $t = pg^{r+1}x_0x_1\cdots x_r$ (x_0 任意指定), 則 $x_i = LK^{r-i}t$ $(i=1, \cdots, r)$, 故

$$P \equiv \exists tB(LK^{r-1}t, LK^{r-2}t, \cdots, LKt, Lt, y_1, \cdots, y_s).$$

显然, $B(LK^{r-1}t, \cdots, Lt, y_1, \cdots, y_s)$ 极易表为初基謂詞. 同理, 如果 P 为全称化初基謂詞, 則 $\bar{P}$ 为半递归謂詞, 可表成 $\exists xB$ 形, 从而 P 可表成 $\forall x\bar{B}$ 形. 故必要性得証, 从而定理得証.

下面将証, 即使 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 为初等謂詞、原始递归謂詞或一般递归謂詞, $\exists x_i A(x_1, \cdots, x_r)$ 仍为半递归謂詞. $\forall xA$ 仍为全称化初基謂詞.

定理 2 一謂詞是半递归謂詞 (全称化初基謂詞) 当且仅当它可表成 $\exists x_i A(x_1, \cdots, x_r)$ 形 ($\forall x_i A(x_1, \cdots, x_r)$ 形), 而 A 为一般递归謂詞.

証明 必要性是显然的, 因为, 根据上定理, 它必可表成所要求的形状, 而 A 为初基謂詞, 故当然也为一般递归謂詞.

充分性. 設一謂詞表成 $\exists x_i A(x_1, \cdots, x_r)$, 而 A 为一般递归謂詞. 因 $\mathrm{ct}\, A(x_1, \cdots, x_r)$ 为一般递归函数, 故有准初基函数的带头 K、初基函数 B 和自然数 n (K、B 均与謂詞 A 无关), 使得

$$\mathrm{ct}\, A(x_1, \cdots, x_r) = K \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(n, x_1, \cdots, x_r, y),$$

故

$\exists x_i A(x_1, \cdots, x_r)$

等价于 $\exists x_i(\mathrm{ct}\, A(x_1, \cdots, x_r) = 0)$,

等价于 $\exists x_i K \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(n, x_1, \cdots, x_r, y) = 0$,

等价于 $\exists x_i \exists y(Ky = 0 \wedge B(n, x_1, \cdots, x_r, y) = 0$

$$\wedge \underset{t \to y}{\forall} (B(n, x_1, \cdots, x_r, t) = 0 \supset t = y)).$$

显見, 括号内为初基謂詞, 前面冠以 $\exists x_i \exists y$, 故为半递归謂詞.

关于全称化初基謂詞部分, 可由半递归謂詞部分推得. 充分

性得証，从而定理得証.

讀者試証，該定理中的 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 也可限定为初等謂詞或原始递归謂詞.

上定理的証明中，由于括号內的謂詞与所給的謂詞 A 无关，故可进一步推得

定理 3 对于每个自然数 r，均有一个固定的 $r+1$ 元牛递归謂詞(全称化初基謂詞) $T(t, x_1, \cdots, x_r)$，使得任給一个 r 元牛递归謂詞(全称化初基謂詞) $A(x_1, \cdots, x_r)$，恒有一自然数 n，使得 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 等价于 $T(n, x_1, \cdots, x_r)$.

証明 所求的牛递归謂詞(全称化初基謂詞) $T(t, x_1, \cdots, x_r)$ 即是上定理証明中最后一行所作出的謂詞(其否定謂詞).

这个 $r+1$ 元牛递归謂詞(全称化初基謂詞) $A(t, x_1, \cdots, x_r)$ 可以叫做 r 元牛递归謂詞(全称化初基謂詞)的**枚举謂詞**或**通用謂詞**(注意：多項式謂詞、初基謂詞、乃至一般递归謂詞的枚举謂詞，均越出原屬的謂詞集以外，只有牛递归謂詞及全称化初基謂詞的枚举謂詞則否).

由定理 3 可推得

定理 4 牛递归謂詞集(全称化初基謂詞集)大于一般递归謂詞集. 具体說来，r 元牛递归謂詞(全称化初基謂詞)的枚举謂詞 $T(t, x_1, \cdots, x_r)$ 虽是牛递归謂詞(全称化初基謂詞)，却不是一般递归謂詞.

証明 如它是一般递归謂詞，則 $\overline{T}(t, x_1, \cdots, x_r)$，因而 $\overline{T}(x_1, x_1, \cdots, x_r)$ 便是一般递归謂詞，更是牛递归謂詞. 但后者为 r 元，于是便有一数 n，使得

$$\overline{T}(x_1, x_1, \cdots, x_r) \quad 等价于 \quad T(n, x_1, \cdots, x_r).$$

令各 x_i 皆为 n，即得出一矛盾. 定理得証.

定理 5 牛递归謂詞集(全称化初基謂詞集)对“或”、“且”及受限量詞、不受限存在(不受限全称)量詞是封閉的，但对“否定”及不

受限全称量詞則不封閉.

証明 設有两个半递归謂詞 P、Q, 可表成:

$$P=\exists x A(x_1, \cdots, x_r, x),$$

$$Q=\exists y B(y_1, \cdots, y_s, y).$$

作改名以使 x 与 y 不同(至于 x_i, 可与 y_j 相同), 則

$$P\vee Q \quad 等价于 \quad \exists x\exists y(A\vee B),$$

$$P\wedge Q \quad 等价于 \quad \exists x\exists y(A\vee B),$$

$$\exists x_i P \quad 等价于 \quad \exists x_i\exists x A,$$

$$\exists_{x_i\to u} P \quad 等价于 \quad \exists x_i\exists x(x_i\leqslant u\wedge A).$$

它們显然仍都是半递归謂詞. 要証半递归謂詞对受限全称量詞封閉,可作如下的考慮:

$$\forall_{x_r\to z} P \quad 等价于 \quad \forall_{x_r\to z}\exists x A(x_1, \cdots, x_r, x)$$

(下面暫以 i 代 x_r). 要說"对于 z 以下的每个 i, 均有一个 x, 使得 $A(x_1, \cdots, i, x)$成立"; 等于說(注意:这个 x 是随 i 而变的, 卽是 i 的函数,特記为 $x(i)$)"有一数列 $x(0)$, $x(1)$, $\cdots$, $x(z)$, 使得对于每个 z 以下的 i, 均使 $A(x_1, \cdots, i, x(i))$成立". 但存在一数 w, 使得

$$\mathrm{tm}(i, w)=x(i) \quad (i=0, 1, \cdots, z),$$

故上語句亦等于說是"有一 w, 使得对于 z 以下的 i, 均有 $A(x_1, \cdots, i, \mathrm{tm}(i, w))$", 亦卽

$$\forall_{x_i\to z} P \quad 等价于 \quad \exists w\forall_{i\to z} A(x_1, \cdots, x_{r-1}, i, \mathrm{tm}(i, w)).$$

但 $A(x_1, \cdots, x_{r-1}, t, \mathrm{tm}(t, w))$ 极易表为初基謂詞, 再冠以受限全称量詞 $\forall_{t\to z}$ 亦然,再冠以存在量詞 $\exists w$ 后显然便是半递归謂詞了.

要証明不封閉性部分, 只要注意到: 半递归謂詞的枚举謂詞 $T(t, x_1, \cdots, x_r)$既是半递归謂詞,故它可表成 $\exists y B(t, x_1, \cdots, x_r, y)$ 之形,而 B 为初基謂詞; 从而 $\overline{T}$ 便可表为 $\forall y\overline{B}(t, x_1, \cdots, x_r, y)$ 形,而 $\overline{B}$ 也为初基謂詞,故如果半递归謂詞对"否定"封閉, 或对不受限全称量詞封閉,則必然可推出

$$\bar{T}(t, x_1, \cdots, x_r) \text{ 是半递归謂詞.}$$

这与定理4的証明部分矛盾. 故半递归謂詞不可能对否定詞封閉, 也不可能对不受限全称量詞封閉. 定理得証.

半递归謂詞(全称化初基謂詞)虽然比一般递归謂詞更广, 但两者之間有很密切的关系.

定理 6 一謂詞 $P(x_1, \cdots, x_r)$ 及其否定 $\bar{P}(x_1, \cdots, x_r)$ 均为半递归謂詞,当且仅当它們均为全称化初基謂詞;亦即当且仅当它們均为一般递归謂詞.

証明 既然 P 及 $\bar{P}$ 均为半递归謂詞, 故应有一般递归函数 A 及 B, 使得

$$P \quad \text{可表为} \quad \exists y\, A(x_1, \cdots, x_r, y),$$

$$\bar{P} \quad \text{可表为} \quad \exists y\, B(x_1, \cdots, x_r, y),$$

因为 $P \vee \bar{P}$ 永眞, 故 $\exists y(A(x_1, \cdots, x_r, y) \vee B(x_1, \cdots, x_r, y))$ 永眞, 于是下方程右端(这里的 μy 系指使作用域成眞的那个最小的 y)是正常摹状式, 即永有意义:

$$h(x_1, \cdots, x_r) = \mu y[A(x_1, \cdots, x_r, y) \vee B(x_1, \cdots, x_r, y)],$$

因而 h 为一般递归函数. 故

$$P \quad \text{等价于} \quad A(x_1, \cdots, x_r, h(x_1, \cdots, x_r)),$$

$$\bar{P} \quad \text{等价于} \quad B(x_1, \cdots, x_r, h(x_1, \cdots, x_r)).$$

足見两者均为一般递归謂詞.

此外, 对半递归謂詞, 还有另一个标准式如下: 所使用的初基謂詞可限定为由多项式謂詞先添若干个受限存在量詞、最后添一个受限全称量詞而成. 换言之, 我們有下列定理

定理 7 一謂詞为半递归謂詞, 当且仅当它可表成下形:

$$\exists x \forall_{y \to x} A(u_1, \cdots, u_r, x, y),$$

而 A 乃是由多项式謂詞添受限存在量詞而得的.

証明 充分性显然, 今証必要性.

我們知道, 半递归謂詞可由新初基謂詞添加不受限存在量詞

而得，新初基謂詞又可由多項式謂詞添加受限量詞而得，故半递归謂詞可由多項式謂詞出发，經过有限次受限量詞及不受限存在量詞而作成.

只須添加象征变元，即可把多項式謂詞表成所要求的形状，故“奠基”部分得証.

其次，設一謂詞已表成 $\exists x \forall_{y\to x} A(u_1, \cdots, u_r, x, y)$ 之形，則

(1) 当添加不受限存在量詞 $\exists u_r$ 时(下面以 t 表示 $pg(u_r, x)$)，

$$\exists u_r \exists x \forall_{y\to x} A(u_1, \cdots, u_r, x, y)$$

等价于

$$\exists t \forall_{y\to Lt} A(u_1, \cdots, u_{r-1}, Kt, Lt, y),$$

等价于

$$\exists t \forall_{y\to t} (y>Lt \vee A(u_1, \cdots, u_{r-1}, Kt, Lt, y)),$$

等价于

$$\exists t \forall_{y\to t} \exists_{u\to t} \exists_{v\to t} \exists_{w\to t} (y=v+w+1 \vee \cdot A(u_1, \cdots, u_{r-1}, u, v, y) \wedge t=pg(u, v)),$$

等价于

$$\exists t \forall_{y\to t} A_1(u_1, \cdots, u_r, t, y),$$

而 A_1 可表为多項式謂詞添加受限存在量詞的形状，于是合乎要求.

(2) 当添加受限存在量詞时，

$$\exists_{u_r\to u_t} \exists x \forall_{y\to x} A(u_1, \cdots, u_r, x, y)$$

等价于

$$\exists u_r \exists x \forall_{y\to x} \exists_{w\to u_t} (u_t=u_r+w \wedge A(u_1, \cdots, u_r, x, y)),$$

故由上面的(1)可知它可表成所要求的形状.

(3) 当添加受限全称量詞时，首先注意：“在 u_t 以下的每个 u_r(下面暂記为 i)，均有 x，使得 $\alpha(x)$”这命題等价于“有一数列 $x(i)$，使得 $i\leqslant u_t$ 时有 $\alpha(x(i))$”，亦即“有一数 w，使得 $i\leqslant u_t$ 时有 $\alpha(\mathrm{tm}(i, w))$”(参見第 276 頁). 明白这一点后，便可知

$$\forall_{u_r\to u_t} \exists x \forall_{y\to x} A(u_1, \cdots, u_r, x, y)$$

等价于

$$\exists w \forall_{i\to u_t,} \forall_{y\to \mathrm{tm}(i,w)} A(u_1, \cdots, u_r, \mathrm{tm}(i, w), y).$$

若命 $v=pg(u_t, w)$, $q=pg(i, y)$ (这里 pg 对 x、y 不减),則

$$q=pg(i, y)\leqslant pg(u_t, \mathrm{tm}(i, w))\leqslant pg(u, w)=v,$$

即 q 的变域必在 v 以下,因而上式等价于

$$\exists v \forall_{q\to v} \exists_{b\to v} \exists_{c\to v} [Kq=Kv+b+1 \vee Lq=\mathrm{tm}(Kq, Lv)+c+1$$
$$\vee A(u_1, \cdots, u_r, \mathrm{tm}(Kq, Lv), Lq)].$$

它显然可表成所要求的 $\exists v \forall_{q\to v} A_2(u_1, \cdots, u_t, v, q)$ 形.

綜上三方面看来,所要求的形状不因添加受限量詞及不受限存在量詞而有所影响. 由数学归納法,于是定理得証.

如詳細写出本定理所要求的形状便是:

$$\exists x \forall_{y\to x} \exists_{z_1\to x_1} \cdots \exists_{z_r\to x_r} (P=Q) \qquad (P、Q \text{ 为多项式}),$$

对这标准式还可作进一步的要求:要求各 x_i 均与 x 相同,即还可有下列改进的定理.

定理 8 一謂詞是半递归謂詞当且仅当它可表成下形:

$$\exists x \forall_{y\to x} \exists_{z_1\to x} \cdots \exists_{z_r\to x} (P=Q),$$

而 P、Q 为两个多項式.

証明 充分性显然,下面来証明必要性.

由定理 7 知,該半递归謂詞可表成下形:

$$\exists x \forall_{y\to x} \exists_{z_1\to x_1} \cdots \exists_{z_r\to x_r} (P=Q),$$

試命 $\max\limits_{i\to r} x_i=l$ 且 $pg(x, l)=t$, 則得

$$\exists t \forall_{y\to t} \exists_{z_1\to t} \cdots \exists_{z_r\to t} \exists_{x\to t} \exists_{l\to t} [(z_1\leqslant x_1) \wedge \cdots \wedge (z_r\leqslant x_r)$$
$$\wedge (y>x \vee P=Q) \wedge t=pg(x, l)].$$

再仿上法便易变到所要求的形状了. 于是定理得証.

上面說过,存在一个半递归謂詞的枚举謂詞. 如果把該謂詞表成上述标准形,便可得出下面的定理.

定理 9 对每个 r, 都有两个多项式 $P(n, x_1, \cdots, x_r, u_1, \cdots, u_h, x, y)$ 和 $Q(n, x_1, \cdots, x_r, u_1, \cdots, u_h, x, y)$, 使得对每一个 r 元半递归謂詞, 都有一个自然数 n_0 使

$$A(x_1, \cdots, x_r) \quad \text{等价于} \quad \exists x \forall_{y\to x} \exists_{z_1\to x} \cdots \exists_{z_r\to x} (P(n_0) = Q(n_0)).$$

习 题

1. 半递归謂詞既包括初基謂詞乃至一般递归謂詞, 为什么后二謂詞集对"否定"封閉而半递归謂詞集却对"否定"不封閉?

在什么情况下, 可以由 A 的子集对命題联結詞封閉而推出 A 集对命題联結詞也封閉?

2. 試仿本节关于半递归謂詞的标准式的化归, 而推出关于全称化初基謂詞的标准式.

§5 算 术 謂 詞

算术謂詞可以説是半递归謂詞和全称化初基謂詞的推广. 为此, 下面先討論一些关于量詞的性质.

对量詞变元可以任意改名, 例如: 只要 $A(x)$ 中无 y, 則 $\forall x A(x)$ 可改名为 $\forall y A(y)$.

若干个量詞依次連接, 組成一个**首标**. 在数理邏輯中已經証明, 不論用何种方式添入量詞, 所得式子均可化成本身无量詞的、但前面冠以首标的公式(称之为**前束范式**). 下文将常用 (α)、(β) 等表示任一首标, 并用 (α')、(β') 表示其对偶(由 $\forall$、$\exists$ 互换而得). 例如設 (α) 为 $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \exists x_5$, 这时 (α') 为 $\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \forall x_5$; 又如設 (β) 为 $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4$, 这时 (β') 为 $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4$. 若干个同类量詞相邻时組成一层, 例如 $\forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall z \exists u_1 \exists u_2$ 組成从 $\forall$ 起的四层. 用 $(\forall)$、$(\exists)$ 分別表示由若干个全称、存在量詞所組成的层. 例如

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \forall x_5 \forall x_6 \text{ 可簡記为 } (\exists)\forall\exists(\forall),$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \exists x_5 \exists x_6 \text{ 可簡記为 } \forall\exists(\forall)(\exists),$$

等等.

定义 在多項式謂詞前面冠以有限多个不受限量詞，所得的謂詞叫做**算术謂詞**.

定理 1 算术謂詞对命題联結詞及量詞(受限或否)是封閉的.

証明 設有两算术謂詞 P、Q，它們可表示如下:

$$P=(\alpha)(A_1=A_2),\quad Q=(\beta)(B_1=B_2).$$

这里的(α)、(β)为任意两首标,并可改名使其量詞变元互不相同,而 A_1、A_2、B_1、B_2 为多項式. 我們有:

$$\bar{P} \qquad \overline{(\alpha)}(A_1=A_2),$$

等价于

$$(\alpha')(A_1\neq A_2),$$

再,等价于 $(\alpha')\exists t(A_1=1+t+A_2\vee A_1+1+t=A_2)$,

$$P\vee Q \qquad (\alpha)(\beta)(A_1=A_2\vee B_1=B_2),$$

$$P\wedge Q \qquad (\alpha)(\beta)(A_1=A_2\wedge B_1=B_2),$$

$$\forall xP \qquad \forall x(\alpha)(A_1=A_2),$$

$$\exists xP \qquad \exists x(\alpha)(A_1=A_2),$$

$$\underset{x\to u}{\forall} P \qquad \forall x(x>u\vee(\alpha)(A_1=A_2)),$$

等价于

$$\forall x(\alpha)\exists t(x=u+t+1\vee A_1=A_2),$$

$$\underset{x\to u}{\exists} P \qquad \exists x(x\leqslant u\wedge(\alpha)(A_1=A_2)),$$

等价于

$$\exists x(\alpha)\exists t(x+t=u\wedge A_1=A_2),$$

根据 §2 的討論,括号內可表成多項式謂詞,故定理得証.

定理 2 由初基、初等、原始遞归等类謂詞出发,經过命題联結詞及量詞,所得的仍是算术謂詞.

証明 由多項式謂詞,經过命題联結詞及受限量詞,可得新初基謂詞;再經过存在量詞便得半遞归謂詞. 足見算术謂詞包括了以前討論的各类謂詞. 由于算术謂詞对命題联結詞及量詞的封閉

性,故定理得証.

由于半递归謂詞对"否定"及全称量詞不封閉,故知算术謂詞集比前面討論过的各謂詞集均大.

設选用某类謂詞叫做**基准謂詞**,記为 R.

定义 凡能表成 $(\forall)(\exists)\cdots(\alpha)R$(共 n 层)的謂詞称为 $(\forall)_n$ **謂詞**. 凡能表成 $(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)R$(共 n 层)的謂詞称为 $(\exists)_n$ **謂詞**. 既是 $(\forall)_n$ 謂詞又是 $(\exists)_n$ 謂詞的謂詞称为 **(n) 形謂詞**; $(\exists)_1$ 謂詞特称为**存在化 R 謂詞**, $(\forall)_1$ 謂詞特称为**全称化 R 謂詞**.

如果 R(基准謂詞)至少为初基謂詞(这时 $(\exists)_1$ 謂詞便是半递归謂詞),則在首标中每层可只用一个量詞. 例如, 設一謂詞呈

$$\forall x_1\cdots\forall x_h\exists y_1\cdots\exists y_k\forall z_1\cdots\forall z_l A(x_1,\cdots,x_h,y_1,\cdots,y_k,z_1,\cdots,z_l)$$

形,它可表成

$$\forall u\exists v\forall w A(LK^{h-1}u,\cdots,Lu,LK^{k-1}v,\cdots,Lv,LK^{l-1}w,\cdots,Lw),$$

它显然可表成 $\forall u\exists v\forall wR$ 形,即合乎要求.

注意: 当 R 限于多項式謂詞时便不能这样簡化(为什么?),这是为什么存在化多項式謂詞容許多个存在量詞的原因.

定理 3 如果基准謂詞 R 为一般递归謂詞,則基准謂詞集(能表成 R 形的)恰与(1)形謂詞集同.

証明 引入象征变元,显見

$$R(x_1,\cdots,x_n)\text{ 可表为 }\forall xR(x_1,\cdots,x_n)\text{ 及 }\exists xR(x_1,\cdots,x_n),$$

故一般递归謂詞又为 $(\forall)_1$ 及 $(\exists)_1$ 謂詞, 故为 $n=1$ 时的(n)形謂詞(見上定义),即(1)形謂詞.

反之,設 P 为(1)形謂詞,即 P 可表为

$$P=\forall x Q_1(x_1,\cdots,x_n,x),$$

$$P=\exists x Q_2(x_1,\cdots,x_n,x),$$

則 $\bar{P}=\exists x\bar{Q}_1(x_1,\cdots,x_n,x)$. 故

$$P\vee\bar{P}=\exists x(\bar{Q}_1(x_1,\cdots,x_n,x)\vee Q_2(x_1,\cdots,x_n,x)),$$

故知

$$\mu x(\bar{Q}_1(x_1, \cdots, x_n, x) \vee Q_2(x_1, \cdots, x_n, x)) = w(x_1, \cdots, x_n)$$

对每組$(x_1, \cdots, x_n)$均有定义，从而为一般递归函数. 但$P = Q_2(x_1, \cdots, x_n, w(x_1, \cdots, x_n))$，足見 P 为一般递归謂詞.

合并两者結果，定理得証.

注意：如果基准謂詞非一般递归謂詞，則基准謂詞集未必与(1)形謂詞集相同.

通常均以一般递归謂詞为基准謂詞，这时 $(\exists)_1$ 謂詞卽半递归謂詞.

关于算术謂詞的一条很重要的定理是

定理 4 对任一自然数 $n \geqslant 1$ 說来，有

(1) $(\forall)_n$ 謂詞集及 $(\exists)_n$ 謂詞集均为$(n+1)$形謂詞集的眞子集；

(2) $(\forall)_n$ 謂詞集与 $(\exists)_n$ 謂詞集互不包含；

(3) (n)形謂詞集为 $(\forall)_n$ 謂詞集的眞子集，也为 $(\exists)_n$ 謂詞集的眞子集.

証明 (1) 引入象征变元后，$(\forall)_n$ 謂詞及 $(\exists)_n$ 謂詞均可表为 $(\forall)_{n+1}$ 謂詞，亦可表为 $(\exists)_{n+1}$ 謂詞. 例如設

$$P = (\forall)(\exists)\cdots(\alpha)A, \quad Q = (\exists)(\forall)\cdots(\alpha)B$$

(这里的 α 或为 $\forall$ 或为 $\exists$，需視 n 的奇偶而定).

則

$$P = (\forall)(\exists)\cdots(\alpha)\alpha' A \qquad [(\forall)_{n+1}]$$
$$= \exists(\forall)(\exists)\cdots(\alpha)A, \qquad [(\exists)_{n+1}]$$
$$Q = \forall(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)B \qquad [(\forall)_{n+1}]$$
$$= (\exists)(\forall)\cdots(\alpha)\alpha' B. \qquad [(\exists)_{n+1}]$$

故知 $(\forall)_n$ 謂詞及 $(\exists)_n$ 謂詞均为$(n+1)$形謂詞的子集. 如要証明它們为 $(n+1)$ 形謂詞集的眞子集，可仿下面的(3)的証明，在此从略了.

(2) 今作一謂詞，使得它可表成 $(\forall)_n$ 形：

$$(\forall)(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)R(t_1, \cdots, t_h, x_1, \cdots, x_n),$$

[諸 x_i 表示前面量詞中的变元,下同],

但是它不能表成下列 $(\exists)_n$ 形:

$$(\exists)(\forall)(\exists)\cdots(\alpha')R(t_1, \cdots, t_h, x_1, \cdots, x_n).$$

不丧失普遍性,可假定 $h=1$, 下文并把"t_1"写为"t".

所作的謂詞,即由 $n+1$ 元半递归謂詞的枚举謂詞 $A(m, t, x_1, \cdots, x_n)$ 作否定,再冠以相应量詞 $(\forall)(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)$, 最后令 $m=t$ 而成;即 $(\forall)(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)\overline{A}(t, t, x_1, \cdots, x_n)$.

任取一个一般递归謂詞 $R(t, x_1, \cdots, x_n)$, 应有 m 使得

$$R(t, x_1, \cdots, x_n) \equiv A(m, t, x_1, \cdots, x_n).$$

再得

$$\begin{aligned}&(\exists)(\forall)(\exists)\cdots(\alpha)R(t, x_1, \cdots, x_n)\\&\quad\equiv(\exists)(\forall)(\exists)\cdots(\alpha)A(m, t, x_1, \cdots, x_n)\\&\quad\equiv\overline{(\forall)}(\exists)(\forall)\cdots(\alpha')\overline{A}(m, t, x_1, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

当 $t=m$ 时,

$$\begin{aligned}&(\exists)(\forall)(\exists)\cdots(\alpha)R(m, x_1, \cdots, x_n)\\&\quad\equiv\overline{(\forall)}(\exists)(\forall)\cdots(\alpha')\overline{A}(m, m, x_1, \cdots, x_n)\\&\quad\not\equiv(\forall)(\exists)(\forall)\cdots(\alpha')\overline{A}(m, m, x_1, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

足見右端的 $(\forall)_n$ 形謂詞在 $t=m$ 处与左端的 $(\exists)_n$ 形謂詞不等价,故在这里它不能表为由 R 冠以 $(\exists)_n$ 形的謂詞. 因 R 是任意取的,故知它决不能表为 $(\exists)_n$ 形謂詞.

同理,有一个 $(\exists)_n$ 形謂詞,它不能表为 $(\forall)_n$ 形謂詞,故断言(2)得証.

(3) 依定义,(n) 形謂詞集为 $(\forall)_n$ 謂詞集的子集,也为 $(\exists)_n$ 謂詞集的子集. 如果 (n) 形謂詞集不是 $(\forall)_n$ 謂詞集的眞子集,則这两集相同,从而 $(\forall)_n$ 集便为 $(\exists)_n$ 集的子集,这与断言(2)矛盾. 故知 (n) 形謂詞集必为 $(\forall)_n$ 謂詞集的眞子集. 同理,(n) 形謂詞集亦必为 $(\exists)_n$ 集的眞子集. 断言(3)得証.

于是定理得証.

由定理 4 立即可推得：对任一 n 說来，$(n+1)$ 形、$(\forall)_n$、$(\exists)_n$、(n) 形謂詞集都是彼此不同的.

由此更可推得：如果 $m\neq n$，則 (m) 形、$(\forall)_m$、$(\exists)_m$ 謂詞集与 (n) 形、$(\forall)_n$、$(\exists)_n$ 謂詞集亦是彼此不同的.

这便表明了算术謂詞集的丰富內容.

仿半递归謂詞处的討論，可得

定理 5 如果基准謂詞 R 至少为初基謂詞，則 $(\exists)_n$ 謂詞（$(\forall)_n$ 謂詞）对"或"、"且"是封閉的，对受限量詞是封閉的，对不受限存在（全称）量詞是封閉的，但对"否定"及不受限全称（存在）量詞則否.

証明 由上面各定理易得，$(\exists)_n$ 謂詞（$(\forall)_n$ 謂詞）对"否定"及不受限全称（存在）量詞是不封閉的（讀者自証），現討論封閉性部分.

試就 $(\exists)_n$ 謂詞討論．設其中有两謂詞 P、Q．这里先行改名，使該两謂詞的量詞变元不同．設

$$P=(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)A(x,\cdots),\quad Q=(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)B(x,\cdots).$$

于是有

$$P\vee Q \quad \text{等价于} \quad (\exists)(\exists)(\forall)(\forall)\cdots(\alpha)(\alpha)(A(x,\cdots)\vee B(x,\cdots)),$$

$$\exists x P \quad \text{等价于} \quad \exists(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)A(x,\cdots),$$

$$\underset{x\to t}{\exists} P \quad \text{等价于} \quad \exists(\exists)(\forall)\cdots(\alpha)\ (x\leqslant t\wedge A(x,\cdots)).$$

注意"$x\leqslant t\wedge A(x,\cdots)$"显然仍在基准謂詞集中（当它至少为初基謂詞集时）.

剩下还須証明：$(\exists)_n$ 謂詞集对受限全称量詞封閉．由半递归謂詞处的討論可知（注意：因 R 至少为初基謂詞，故各层量詞只用一个）：

$$\underset{x_i\to t}{\forall}\ \exists x(\forall)\cdots(\alpha)\ A(x_i,\ x,\ \cdots)$$

等价于（参見第 276 頁）

$$\exists w\ \underset{i\to t}{\forall}\ (\forall)\cdots(\alpha)\ A(i,\ \mathrm{tm}(i,\ w),\ \cdots)$$

等价于

$$\exists w \forall i (\forall)\cdots(a)\ (A(i,\ \mathrm{tm}(i,\ w),\ \cdots) \vee i>t).$$

注意:如果基准謂詞集 R 至少为初基謂詞集,則作用域显然仍可表成基准謂詞,于是定理得証.

注意: 如果基准謂詞只是多項式謂詞,那么由上面的証明便可看到,它未必对受限量詞封閉.这时只有

定理 6 如果以多項式謂詞为基准謂詞,則 $(\exists)_n$ 謂詞集只对"或"、"且"、不受限存在量詞封閉.当 n 为奇数时,$(\exists)_n$ 謂詞集才对受限存在量詞封閉.无論如何,它对不受限全称量詞不封閉(对 $(\forall)_n$ 謂詞集可仿此来討論).

証明 当 n 为奇数时,$(\exists)_n$ 謂詞的首标以 $\exists$ 开始,以 $\exists$ 結尾.这时 $(\exists)\cdots(a)\exists(x_i \leqslant t \wedge A)$ 可表为

$$(\exists)\cdots(a)\exists\exists u\ (t=x_i+u \wedge A),$$

故它对受限存在量詞封閉.

出乎意外的是:

定理 7 即使以多項式謂詞为基准謂詞,(n) 形謂詞恒对命題联結詞(或、且、否)及对量詞(受限或否,全称或存在)封閉.

讀者試自証之.

当以多項式謂詞为基准謂詞时,$(\exists)_n$ 謂詞集对受限全称量詞封閉或否的問題今尙不知,$(\forall)_n$ 謂詞集对受限存在量詞封閉或否也尙不知.这牽涉到下面一个問題的解决.

在 1900 年,D. Hilbert 提出了一系列数学中未解决的問題,其中却有一个(也只有一个)是判定問題,即:

当任給一整系数代数方程 $P=0$ 时,試决定它有沒有整数根.

显然,該問題可变成:

当任給一自然数系数代数方程 $P=Q$ 时,試决定它有无自然数根.

換言之,試决定 $(\exists)(P=Q)$ 的眞假.

这便是关于 $(\exists)_1$ 謂詞的判定，但限定其基准謂詞为多项式謂詞.

下文将要說明，如果一謂詞是一般递归謂詞，那么它的眞假是可以完全判定的，卽"眞"或"假"均可在有限步驟內知道. 如果一謂詞是半递归謂詞而不是一般递归謂詞，那末它只能半判定，卽当它"眞"时可在有限步驟內知道，而当它"假"时却未必可在有限步驟內知道. Hilbert 所提的問題是可以半判定的；因为如果有根的話，显然可在有限步驟內知道(对自然数逐一試驗便行了)，但是否可以完全判定呢?

上面已經說过，每一个半递归謂詞(包括非一般递归的)均可表成

$$\exists x \forall_{y\to x} \exists_{z_1\to x} \cdots \exists_{z_r\to x} (P=Q)$$

之形，如果当以多項式謂詞为基准謂詞时，$(\exists)_1$ 謂詞对受限全称量詞封閉，那么这显然是 $(\exists)_1$ 謂詞，卽它又可表成

$$(\exists)\ (P_1=Q_1)$$

之形，旣然这形状包括了一切半递归謂詞，那便表明，至少有些(含参数的)多項式方程，它对哪些参数有根、对哪些参数无根是不能在有限步驟內知道的. 卽 Hilbert 提出的这个問題是沒有解的.

但 $(\exists)_1$ 謂詞(以多項式为基准)对受限全称量詞的封閉性未明，故 Hilbert 的問題有解或否也未明.

习　題

1. 試証明本节未會詳細証明的定理.

2. 如用不同的謂詞集(多項式謂詞集除外)作为基准謂詞集，則 $(\forall)_n$、$(\exists)_n$ 及 (n) 各类謂詞集是相同的还是不同的?

3. 試将下列謂詞表成存在化多項式謂詞.

(1) $x\neq 0,\ x\neq y,\ x\leqslant y,\ x<y$;

(2) $y=\mathrm{rs}(u,v),\ y=\left[\dfrac{u}{v}\right]$;

(3) x 非质数;

(4) x 非 2 的方幂.

它們的否定有哪些是可表成存在化多項式謂詞的.

4. 上題的各謂詞的否定中,如果有不能表成存在化多項式謂詞,那末能否把它們表成存在化初基謂詞(即半遞归謂詞)?

注意: 由第3、4題并未証明半遞归謂詞大于存在化多項式謂詞,因为所謂"不能表成存在化多項式謂詞"只是"目前不能",并不是"不可能是存在化多項式謂詞".

§6 非算术謂詞之一例

从上面所說可知,算术謂詞远比半遞归謂詞大得多,似乎这是我們所能得到的最大謂詞集了,也似乎不可能有非算术謂詞了.但是事实則不然.

算术謂詞是可数的(极易定出枚举它們的方法来),但数論函数却是不可数的(数論函数集与連續統具同样的基数),因此由集合論的定理可知:必存在非算术謂詞.下面将具体地构造出一个非算术謂詞来.

从上节的討論可見,每一个算术謂詞都由一般遞归謂詞冠以固定个数的量詞而得.因此,只要作出一个具有可变多个量詞的謂詞(即其量詞个数随其中变元的值而变化的),那么它便不是算术謂詞了.

定理 1 存在一个原始遞归謂詞 $R(a)$ 及原始遞归函数 $g(a,x)$,使下式所定义的謂詞 $M(a,k)$ 不是算术謂詞:

$$\begin{cases} M(a,0)=R(a), \\ M(a,2k+1)=\exists x M(g(a,x),2k), \\ M(a,2k+2)=\forall x M(g(a,x),2k+1). \end{cases}$$

証明 依这定义式,有

$$M(a,0)=R(a), \quad M(a,1)=\exists x_1 Rgax_1,$$

$$M(a,2)=\forall x_1 \exists x_2 Rggax_1x_2,$$

$$M(a,\ 2k+1)=\exists x_1\forall x_2\cdots\exists x_{2k+1}Rg^{2k+1}ax_1\cdots x_{2k+1},$$

$$M(a,\ 2k+2)=\forall x_1\exists x_2\cdots\exists x_{2k+2}Rg^{2k+2}ax_1\cdots x_{2k+2}.$$

由上节的討論可知，对于任何 $r+1$ 元半递归謂詞的枚举謂詞 $T(t,\ x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_r)$ 及任何 r 层首标 (α) 而言，

$$(\alpha)\overline{T}(t,\ t,\ x_1,\ \cdots,\ x_r)$$

决不能是 $(\forall)_s$ 或 $(\exists)_s$ 形量詞，而 $s<r$，其中 (α) 为 $\forall x_1\exists x_2\cdots$ 形或为 $\exists x_1\forall x_2\cdots$ 形的首标（共 r 个量詞）.

极易作出一謂詞 V，使得对任何 r 均有

$$V(pg^{r+2}rtx_1\cdots x_r)=\overline{T}(t,\ t,\ x_1,\ \cdots,\ x_r).$$

今即取 $V(a)$ 为定理中所說的 $R(a)$，取 $pg(a,x)$ 为定理中所說的 $g(a,\ x)$，这时

$$M(a,\ 2k+1)=\exists x_1\forall x_2\cdots\exists x_{2k+1}Vpg^{2k+1}ax_1\cdots x_{2k+1},$$

$$M(a,\ 2k+2)=\forall x_1\exists x_2\cdots\exists x_{2k+2}Vpg^{2k+2}ax_1\cdots x_{2k+2}.$$

如果 $M(a,\ k)$ 为算术謂詞，則应有一个一般递归謂詞 $B(a,\ k,\ x_1,\ \cdots,\ x_r)$ 及一个首标 (α)，使得

$$M(a,\ k)=(\alpha)B(a,\ k,\ x_1,\ \cdots,\ x_r),$$

而 (α) 为对 $x_1,\ \cdots,\ x_r$ 的 $(\forall)_r$（或 $(\exists)_r$）首标．任取一奇数 $k>r$，則

$$\begin{aligned}&(\alpha)B(pgkt,\ k,\ x_1,\ \cdots,\ x_r)\\&\equiv M(pgkt,\ k)\\&\equiv(\beta)Vpg^{k+1}ktx_1\cdots x_k\\&\equiv(\beta)\overline{T}(t,\ t,\ x_1,\ \cdots,\ x_k),\end{aligned}$$

这里的 (β) 为 $\exists x_1\forall x_2\cdots\exists x_k$．由上节討論，$(\beta)\overline{T}(t,\ t,\ x_1,\ \cdots,\ x_k)$ 不可能是 $(\forall)_r$ 或 $(\exists)_r$ $(r<k)$ 謂詞，但左端却是 $(\forall)_r$ 或 $(\exists)_r$ 謂詞，故由該等价式导出一矛盾．由該矛盾即知：$M(a,\ k)$ 非算术謂詞，定理得証．

注意：本証明的基本要点是：$M(a,\ k)$ 至少是 $(\forall)_k$ 或 $(\exists)_k$ 謂詞，从而 $M(a,\ k)$（作为二元謂詞）决非算术謂詞．

习 题

1. 本节的递归式是什么样的递归式？它与以前曾經討論过的递归式比較起来是更强呢还是弱于某个递归式？

2. 試作算术謂詞的枚举謂詞，并問其枚举謂詞是否亦为算术謂詞？

§7 部分函数与半特征函数

以前，当定义多项式謂詞（乃至一般递归謂詞）时，都是从該謂詞的特征函数着眼的，但当定义半递归謂詞及算术謂詞时，却說从某某謂詞冠以某某量詞而得，未提到它們的特征函数．到底后面这两种謂詞有无特征函数呢？如有，它們的特征函数又是什么呢？

按定义，每个謂詞都有一个亦只有一个特征函数，因此后两种謂詞当然也有特征函数．不过其特征函数未必是可計算的，卽未必处处都可以在有限个步驟內計算出其值．为什么是这样的呢？

很明显的事实是，如果这两种謂詞的特征函数能够在有限步驟內計算出其值，又注意到特征函数必然是处处有定义的（因謂詞对每一个变元不是“眞”便是“假”），所以必然是一般递归函数（根据邱吉論題）．但后两种謂詞集旣比一般递归謂詞集来得大，因而，一般說来，其特征函数必非一般递归函数，从而不是可計算的函数．

旣然这些謂詞的特征函数不是恒可計算的，特征函数便丧失其主要效用了．为此，这里引入半特征函数的概念．

定义 設有一謂詞 $A(x)$，如果一函数 $f(x)$ 满足下列条件：

当 $A(x)$ 眞（假）时，$f(x)$ 为 0；

当 $A(x)$ 假（眞）时，$f(x)$ 或者有值而非0或根本沒有值；

那么，便称 $f(x)$ 为 $A(x)$ 的**肯定性**（**否定性**）**的半特征函数**．

半特征函数的特点在于：它可以对某些 x 沒有值，卽沒有定义．不过必須限定，沒有值的情况只出現于 $A(x)$ 为“假”（或为

“眞”)时,否则半特征函数也就失去其作用了.

因此,由于半特征函数的引入,这里便可以考虑存在化多項式謂詞、半遞归謂詞、乃至全称化多項式謂詞的(肯定性或否定性的)半特征函数了.

定理 1 一謂詞为半遞归謂詞,当且仅当它的肯定性半特征函数为半遞归函数.

証明 必要性. 設一謂詞 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 为半遞归謂詞,依定义,应有一初基謂詞 $B(x_1, \cdots, x_r, y)$, 使得

$$A(x_1, \cdots, x_r) \equiv \exists y\, B(x_1, \cdots, x_r, y),$$

亦即:有一初基函数 $b(x_1, \cdots, x_r, y)$, 使得

$$A(x_1, \cdots, x_r) \equiv \exists y[b(x_1, \cdots, x_r, y)=0].$$

今定义一函数 $a(x_1, \cdots, x_r)$ 如下:

$$a(x_1, \cdots, x_r)=\underset{y}{\mathrm{rti}}\, b(x_1, \cdots, x_r, y) \dot{-} \underset{y}{\mathrm{rti}}\, b(x_1, \cdots, x_r, y).$$

易見,有下列关系式成立:

$A(x_1, \cdots, x_r)$ 眞,当且仅当 $b(x_1, \cdots, x_r, y)=0$ 有 y 根,

当且仅当 $\underset{y}{\mathrm{rti}}\, b(x_1, \cdots, x_r, y)$ 有定义,

当且仅当 $a(x_1, \cdots, x_r)$ 有定义且其值为 0;

$A(x_1, \cdots, x_r)$ 假,当且仅当 $a(x_1, \cdots, x_r)$ 沒有定义.

故知 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 以 $a(x_1, \cdots, x_r)$ 为其肯定性半特征函数. 但 $a(x_1, \cdots, x_r)$ 为半遞归函数,故必要性得証.

充分性. 設有一半遞归函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$, 則有两函数 K、B 及一自然数 n, 使得

$$f(x_1, \cdots, x_r)=K\, \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(u, x_1, \cdots, x_r, y).$$

如果 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 便是謂詞 $F(x_1, \cdots, x_r)$ 的肯定性半特征函数,显見:

$F(x_1, \cdots, x_r)$ 眞, 当且仅当 $K\, \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(n, x_1, \cdots, x_r, y)$ 存在且等于 0,

而

$F(x_1, \cdots, x_r)$ 假,当且仅当:

$$\text{或者 } K\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\,B(n,\ x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)\text{不存在},$$
$$\text{或者虽存在而其值不为 } 0.$$

因此,謂詞 $F(x_1, \cdots, x_r)$ 可表示如下:

$$\exists y\ (Ky=0 \wedge B(n,\ x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y)=0$$
$$\wedge \underset{z\to y}{\forall}(B(n,\ x_1,\ \cdots,\ x_r,\ z)=0 \supset z=y)).$$

$F(x_1, \cdots, x_r)$ 显然为半递归謂詞,故充分性得証.于是定理証毕.

存在化多項式謂詞为半递归謂詞的一种,故得:

定理 2 存在化多項式謂詞的肯定性半特征函数也是半递归函数.至于是否凡半递归函数均是某一个存在化多項式謂詞的肯定性半特征函数,則須看后者是否与半递归謂詞全同而定.

与上定理对偶,又有

定理 3 一謂詞之为 $(\forall)_1$ 形謂詞,当且仅当它的否定性半特征函数为半递归函数.

証明 因一謂詞为 $(\forall)_1$ 形,当且仅当它的否定为 $(\exists)_1$ 形,即它的否定为半递归謂詞.

依定义,有些 $(\forall)_r$ 及 $(\exists)_r$ $(r\geqslant 1)$ 形的算术謂詞是不能表成具更少量詞的形状的,因此,当 $r>1$ 时,有些 $(\forall)_r$ 形謂詞及 $(\exists)_r$ 形謂詞是不能以半递归函数为其半特征函数的(无論肯定性或否定性).对它們来說,不但特征函数的概念不发揮作用,連半特征函数的概念也不发揮作用;不但一般递归函数不发揮作用,連半递归函数也不发揮作用.这类謂詞的特征函数及半特征函数都是不可半計算的.

习　题

1. 設某謂詞集中各謂詞均以某类函数为其肯定性(否定性)半特征函数,問該集謂詞对命题联結詞及量詞的封閉性怎样?

2. 如果一謂詞既以某类函数为其肯定性半特征函数,又以該类函数为其否定性半特征函数,能否断定它必以該类函数为特征函数?

§8 集　合

本节将对自然数集作进一步的研究．讀者可以看到，由于对自然数集作进一步的研究，将可对謂詞有进一步的认識．

每一个数集都可由一个含 x 的条件来决定．設該条件表为 $A(x)$，那末由一切使 $A(x)$ 为眞的 x 所組成的集便記为 $\lambda_x A(x)$（在有些书上，尤其数学分析方面的书上，記其为 $E_x A(x)$），$A(x)$ 便叫做該集的**定义条件**或**定义謂詞**．一集的定义謂詞的特征函数也叫做該集的**特征函数**．

設 $\Delta=\lambda_x A(x)$，$\nabla=\lambda_x B(x)$，那么

$$\mathscr{C}\Delta=\lambda_x \overline{A}(x) \quad (\Delta \text{ 的余集，或 } \Delta \text{ 的补集}),$$

$$\Delta\cap\nabla=\lambda_x A(x)\wedge B(x) \quad (\Delta、\nabla \text{ 的交集}),$$

$$\Delta\cup\nabla=\lambda_x A(x)\vee B(x) \quad (\Delta、\nabla \text{ 的并集}).$$

又設 $\Delta_i=\lambda_x A(i, x)$，則

$$\bigcup_i \Delta_i=\lambda_x \exists_i A(i, x), \qquad \bigcup_{i\to m} \Delta_i=\lambda_x \exists_{i\to m} A(i, x);$$

$$\bigcap_i \Delta_i=\lambda_x \forall_i A(i, x), \qquad \bigcup_{i\to m} \Delta_i=\lambda_x \forall_{i\to m} A(i, x).$$

定义　如果 Δ 的定义謂詞为某某謂詞，Δ 便称为某某集．

因此，便有多項式集，初基集，初等集，原始遞归集，一般遞归集，半遞归集和算术集等等概念．由 $(\forall)_1$ 謂詞所定义的集合显然是半遞归集的补集，下文不再特别討論．

显然有下列关系（右包含左）：

多項式集——新初基集——初等集——原始遞归集——一般遞归集——半遞归集——算术集．

这可从它們各自的定义謂詞間的关系而看出．同理，考虑其定义謂詞，可得

定理 1　(1) 如果 Δ、∇、Δ_i 为多項式集，則 $\Delta\cap\nabla$、$\Delta\cup\nabla$、$\bigcap_i \Delta_i$、$\bigcap_{i\to n} \Delta_i$ 亦然（但 $\mathscr{C}\Delta$、$\bigcup_i \Delta_i$、$\bigcup_{i\to n} \Delta_i$ 則未必然）；

(2) 如果 Δ、∇、Δ_i 为初基集，或初等集，或原始递归集，或一般递归集，則 $\mathscr{C}\Delta$、$\Delta\cap\nabla$、$\Delta\cup\nabla$、$\bigcup_{i\to n}\Delta_i$、$\bigcap_{i\to n}\Delta_i$ 亦然(但 $\bigcup_i\Delta_i$、$\bigcap_i\Delta_i$ 則未必然)；

(3) 如果 Δ、∇、Δ_i 为半递归集，則 $\Delta\cap\nabla$、$\Delta\cup\nabla$、$\bigcup_i\Delta_i$、$\bigcup_{i\to n}\Delta_i$、$\bigcap_{i\to n}\Delta_i$ 亦然(但 $\mathscr{C}\Delta$、$\bigcup_{i\to n}\Delta_i$ 則未必然)；

(4) 如果 Δ、∇、Δ_i 为算术集，則 $\mathscr{C}\Delta$、$\Delta\cap\nabla$、$\Delta\cup\nabla$、$\bigcup_i\Delta_i$、$\bigcup_{i\to n}\Delta_i$、$\bigcap_i\Delta_i$、$\bigcap_{i\to n}\Delta_i$ 亦然.

其証明甚易，讀者可自証之.

Δ 的特征函数也即是 Δ 的定义謂詞的特征函数. 上面已从謂詞的特征函数出发而对謂詞加以充分的討論，对上面的結果略作更改，把“謂詞”字样适当地換为“集合”字样(各种用語当然作相应的更改)，便可以得出一大批有关于集合与其特征函数的定理来，但对此不准备在这里贅述(讀者可自行做出).

当然，集合与函数的关系絕不限于这一点.

設已給出一函数 f，可以从两方面加以討論，从而得出两个有关的集合. 第一，当它为一元时其定义域是什么样的集合？第二，它的值域是什么样的集合？

先来討論定义域，显而易見：多項式函数、初基函数、初等函数、原始递归函数、一般递归函数的定义域是整个自然数集合，該集合的定义謂詞显然是 $x=x$ 或 $x\dot{-}x=0$，足見这个集合是多項式集合，无須特别探討.

至于半递归函数，其定义域是什么呢？每一个一元半递归函数 $f(x)$ 均可表成下形：

$$f(x)=K\ \underset{y}{\mathrm{rti}}\ B(n,\ x,\ y),$$

而 n 为一自然数，K 为带头函数，B 为初基函数. 設 $f(x)$ 的定义域为 Δ，显見

$$x\ 属于\ \Delta \quad 当且仅当 \quad \exists y\,[B(n,\ x,\ y)=0].$$

但 $\exists y\,[B(n,\ x,\ y)=0]$ 显然是半递归謂詞. Δ 的定义謂詞既为半

递归謂詞,故 Δ 为半递归集. 因而得

定理 2　半递归函数的定义域必为半递归集.

至于什么函数以算术集为其定义域呢? 这个問題的討論已超出了本书的范圍,今不贅述.

現再討論值域. 在定义域方面, 自一般递归函数以下属于一类, 其定义域为整个数集; 在值域方面則不然, 自初基函数以上属于一类, 只有多項式函数才属于另一类.

定理 3　多項式函数的值域为存在化多項式集; 而自初基函数起直到半递归函数止, 其值域皆是半递归集. 反之, 每个非空的半递归集都是某个原始递归函数的值域.

証明　設多項式 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 的值域为 Δ. 显然,

x 属于 Δ　当且仅当　$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_r [x = f(x_1, \cdots, x_r)]$.

右端显然为存在化多項式謂詞, 故 Δ 为存在化多項式集.

設一函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 为初基函数直到一般递归函数, 其值域为 Δ, 則

x 属于 Δ　当且仅当　$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_r [x = f(x_1, \cdots, x_r)]$.

右端显为半递归謂詞, 故 Δ 为半递归集.

設 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 为半递归函数, 而其值域为 Δ, 将 f 表为 $K \operatorname{rti}_y B(n, x_1, \cdots, x_r, y)$, K 为带头函数, B 为初基函数, 則

x 属于 Δ　当且仅当:

$$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_r \exists y [x = Ky \wedge B(n, x_1, \cdots, x_r, y) = 0$$
$$\wedge \cdot \forall_{z \to y} (B(n, x_1, \cdots, x_r, z) = 0 \supset z = y)].$$

上謂詞显然为半递归謂詞, 故 Δ 为半递归集. 則定理的前半得証.

反之, 設 Δ 为一个非空半递归集, 含有元素 s_0, 而其定义謂詞为 $\exists y[b(x, y) = 0]$, 这里 $b(x, y)$ 为初基函数. 今定义

$$\begin{cases} f(0) = s_0, \\ f(n+1) = N^2 b(K(n), L(n)) f(n) + N b(K(n), L(n)) \cdot K(n), \end{cases}$$

其中 K、L 为零級初等配对函数. 显見, $b(K(n), L(n)) \neq 0$ 时,

$f(n)$的值同前值；$b(K(n), L(n))=0$时，$f(n)$的值为$K(n)$. 由于n变化时，$(K(n), L(n))$取尽一切对偶，显見$f(n)$取尽了Δ中一切元素，同时$f(n)$的值又全是Δ的元素. 故定理后半也得到了証明.

定义 如果一集Δ为函数$f(x)$的定义域，則称$f(x)$是Δ的**特征(半特征)函数**；如果一集Δ为一函数$f(x_1, \cdots, x_r)$的值域，則称Δ是一个**生成集**，而且是由$f(x_1, \cdots, x_r)$所生成的.

因此，定理3又可改述为

定理4 由多项式函数可以生成存在化多项式集，而由初基函数直到半遞归函数皆生成半遞归集；反之，非空的半遞归集均可由原始遞归函数而生成.

定义 半遞归集又名**遞归枚举集**.

遞归枚举的涵义是：設該集由一元函数$f(x)$生成，則$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，…便将枚举完該集的每一元素，这便等于把該集的元素加以編号(或枚举)，使得可以把它的元素依次枚举完(所以前面加上"遞归"两字是因为：它显然可由遞归函数而生成，即可由遞归函数枚举完).

既然，一般遞归集也是半遞归集的一种，因而一般遞归集也可以看作生成集，从而对于每一个一般(半)遞归集，都可以作出两个函数，一个是它的(半)特征函数，一个是它的生成函数. 当任給一数x，而判定它是否属于Δ时，最好(也是最簡捷的)是利用Δ的特征函数；但要尽量多尽量快地作出該集的各元素时，則以利用它的生成函数最为方便. 因为，当注意点不在于解决某某数是否为該集的元素，而在于尽量多地找出該集的元素来时，如果依旧利用半特征函数来依次决定：0是否为它的元素？1是否为它的元素？……，那么将是很花費时間的，很可能在前的若干个自然数都不是該集的元素，因而这时所作的計算只是白費时間而毫无結果；如果改用其生成函数$f(n)$，只要依次計算$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，…，

便可依次地得出 Δ 的每一个元素，这时每一步計算都是有的放矢. 因此，利用半递归集的生成函数，将是一个非常重要的有价值的方法.

值得指出，有很多集，从其定义的本身来說便是生成集，例如本书所定义的递归生成集便属于这一种；又如任何公理系統也是一个生成集，因为由已証定理逐次应用規則便可以源源得出新定理来. 如果要任意拿一語句而判定它是否属于該集(即是否为定理)，那将是旣浪費时間、又未必得出結果、而且是毫无意义的举动. 旣然在整个数学上可建立公理系統，足見整个数学的定理集也是生成集之一种. 这里可看到生成集的重要性，也足見把半递归集理解为生成集的重要性了.

把半递归集理解为生成集还有一个好处，那便可根本避免"部分函数"的引入. 因为，半递归集可定义为初基函数的值域，而不必定义为半递归函数的定义域(不过部分函数本身有其重要性，根本避免討論大可不必).

从上面的討論可見，对每一集合，它的半特征函数及它的生成函数都是很值得研究的. 如果不引入集合的概念，則"生成函数"的概念也就无从发生，而对递归函数的研究也就不能这样深入了. 这表明了引入集合概念的重要性.

习 题

1. 每一个半递归集中的数加 1 以后得到的数所組成的集合，都是某个原始递归函数的值域中非零数所組成的集合.

注意：这里并不要求該半递归集为非空集.

2. 試証：如果一无穷集合可被一初基、初等、原始或一般递归函数所枚举(即它为該函数的值域)，則它必被另一个一般递归函数所不重复地枚举(即它必为另一函数的值域，后者对每值只取得一次).

第八章 判定問題

§1 个别問題与大量問題

数学中的問題可从两个角度来进行分类.

第一种分类是分为問答題及求作題. 凡是以"眞"、"假"("是"、"否")为答案的,称之为**問答題**;凡是以个体(在"递归函数論"中便是自然数)为答案的,称之为**求作題**. 例如

(1) 3为2的倍数嗎?(答:否.)

(2) x为y的倍数嗎?

便是問答題;

(3) 求3与2的最大公約数.(答:1.)

(4) 求x与y的最大公約数.

便是求作題.

第二种分类是分为个别問題与大量問題. 凡問題中不含有变元,因而其答案是固定的,便称之为**个别問題**;凡問題中含有变元,因而其答案无法預先給出,必待其中变元之值給定后始能給出答案的,便称之为**大量問題**. 例如上面的(1)、(3)为个别問題,(2)、(4)为大量問題. 綜起来說,称(1)为个别問答題,(3)为个别求作題,(2)为大量問答題,(4)为大量求作題.

含变元的問答題,恰巧便是求判定一个含变元的命題的眞假. 例如,(2)可以看作是判定命題"x为y的倍数"的眞假,亦即判定含参变数的語句"x为y的倍数"的眞假. 含变元的求作題可以看作解一个含变元的方程式,例如(4)可以看作是:依z而解下方程:

z为x、y的最大公約数.

設"z为x、y的最大公約数"的特征函数为$A(x, y, z)$,那么(4)

便是:

$$\text{就 } z \text{ 而解方程 } A(x,\ y,\ z)=0,$$

$$\text{或求函数 } \underset{z}{\mathrm{rti}}\, A(x,\ y,\ z) \text{ 的值}.$$

因此,所謂大量問答題便是判定謂詞的眞假問題,所謂大量求作題便是解含参数的方程式的問題，亦卽是求含参变数的摹状算子的值的問題.

对于个别問題(不論問答題或求作題),除要求答案正确外,沒有别的要求. 例如,不考虑解題人所用的方法如何,是用可以推到类似情况去的方法,还是用非常特殊的只适用于本題的方法,还是用“乱猜”的方法,只要答案正确就行了. 当然,在学习的时候,“乱猜”的方法是禁止的，而采用特殊的方法又是不受鼓励的，最好是采用可以推广到类似情况去的方法. 不过这是就学习而論的. 就問題本身的求解說来,只要答案正确,所用的方法是可以不管的.

对于大量問題(不論問答題或求作題)，除要求对变元的每一值均給出正确的答案以外，还要考虑到給出答案的方法. 所用的方法大体上可分为两种:

第一种方法是:尽管对变元的每一个值都給出正确的答案,但获得答案的方法却是对每一个值皆用一个特殊的方法，沒有一个共通的方法.

第二种方法是:使用一个“共通的”方法,卽对变元的每一个值都根据这个方法而获得正确的答案.

但是什么叫做“共通的”方法呢? 这点必須加以明确. 如果这点不能明确,那么上述两种方式的区别也就沒有意义了.

既然大量問題就是解决含变元 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r$ 的問題,所謂“对变元的每一个变值，都根据这个方法而获得正确的答案”是指: 当变元的具体变値还未給出时,先有一个固定的规则,亦卽先有一个固定的函数 $f(x_1,\ \cdots,\ x_r)$，使得当变元的变値(比如 $a_1,\ a_2,\cdots,a_r$)給出时，函数 f 在 $(a_1,\ \cdots,\ a_r)$ 处的值便可告訴我們答案. 卽:

对大量問答題說来，根据 $f(a_1, \cdots, a_r)$ 的值为 0 或否，便可知道所求的答案为“是”或“否”.

对大量求作題說来，$f(a_1, \cdots, a_r)$ 的值恰为問題中所求的答数(当有答案时)或恰为“沒有答案”的信号.

因此，所謂“有一个共通方法”便理解为：在变元的变值还未具体給出时，先有一个函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$，使当变元的值 $a_1, \cdots, a_r$ 給出后，根据 $f(a_1, \cdots, a_r)$ 的值，即可得出相应的解答.

易見，对于大量問題，所說的固定函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 恰为問題中的謂詞的特征函数；对于大量求作題，所說的固定函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 恰为用以求出所求結果的运算規則(或为給出沒有答案的信号的函数). 注意到了这点以后，可以引入下列的定义.

定义 設有一个問答題：

求判定謂詞 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 的眞假.

如果謂詞 $A(x_1, \cdots, x_r)$ 为一般遞归謂詞(即其特征函数为一般遞归函数)，那末該大量問答題便称为**可完全判定的**；如果它为半遞归謂詞，那么該大量問答題便称为**可半判定的**；如果它的否定为半遞归謂詞，那么該大量問答題便說是**可半負判定的**；如果它既非可完全判定又非可半判定、又非可半負判定，便称之为**完全不可判定的**.

定义 設有一个求作題：

試就 y 解方程式 $a(x_1, \cdots, x_r, y)=0$，

如果 $\mathrm{rti}_y\, a(x_1, \cdots, x_r, y)$ 为一般遞归函数，那么該大量求作題便称为**可完全解决的**；如果 $\mathrm{rti}_y\, a(x_1, \cdots, x_r, y)$ 为半遞归函数，那么該大量求作題便称为**可半解决的**；如果 $\mathrm{rti}_y\, a(x_1, \cdots, x_r, y)$ 不是半遞归函数，便称之为**完全不可解决的**.

根据上文的討論，可以知道：

如果一个大量問答題是可完全判定的，那么必有一共通方法，使得当变元的变值給出后，可由共通方法而获得該題的明确答案：

“是”或“否”. 如果它是可半判定的,那么必有一共通方法,使得当变元的变値給出后,如果答案为“是”,必可从共通的方法而判知答案为“是”;如果答案为“否”,則从共通的方法可能也得出“否”的答案,但也可能由于計算过程不停止而根本得不到答案. 如果它是不可判定的,那么根本沒有共通方法可言.

如果一个大量求作題是可完全解决的,那么必有一共通方法,使得当变元的变値給出后,可由該方法而获得該題的明确答案;或給出所求的自然数,或給出“沒有答案”的信号. 如果它是可半解决的,那么必有一共通方法,使得当該問題有解答时該方法給出所求的答数,但当該問題无解答时,該方法可能給出“沒有解答”的信号,也可能由于計算过程不停止而根本得不到任何綫索(或暗示). 如果該問題是不可解决的,那么根本沒有共通方法可言.

对可半判定問題的认識当然沒有对可判定問題的理解那么深刻,因而在应用上利用可判定謂詞当然比利用可半判定謂詞要方便得多. 如果可能的話,应該尽量找可判定謂詞;不过要注意一点,可判定謂詞較少,比較难找,而可半判定謂詞則广泛得多,易找得多. 所以从获得它們的难易性来說,使用可判定謂詞又远远不及使用可半判定謂詞那么方便.

事实上,得到可半判定謂詞后,虽然不能完全解决問題,但总比得到可半判定謂詞以前的理解深刻得多. 如果已經知道某个問題的解决須靠某个可半判定謂詞的眞假而定,那么可以試行逐步檢查該謂詞(对該参数)是否正确.至少說,事情的解决已有了一半的希望. 可見,可半判定(半解决)的問題恰在可完全判定(完全解决)的問題与完全不可判定(解决)的問題之間,象有些书那样,或把它归入“上”(都称做可判定、可解决),或把它归入“下”(都称做不可判定、不可解决),这样做法都是不够妥当的,因此,現在把这三种情况划分清楚.

习　題

1. 試証：一謂詞完全不可判定，当且仅当以一般遞归謂詞为基准謂詞时它为(r) $(r\geqslant 2)$形謂詞（即不能化为(2)形以下的謂詞）.

2. 設把一集按其定义謂詞为可判定、可半(負)判定、完全不能判定而称为**可判定集**、**可半(負)判定集**、**完全不能判定集**. 試討論各种集的性质.

3. 以前討論的各种集，哪些是可完全判定、可半(負)判定的？哪些是完全不能判定的？

§2　判定性的初步性质

本节将对各种判定性的性质加以討論. 討論以問答題为主；对求作題，只把其相应性质加以陈述，不再加以詳細的証明，讀者可补充其証明，作为练习.

在下面的討論中，还可假定参数(即所含的变元)只有一个，因为利用配对函数便可把多个变元变成一个变元，而在判定性方面絕不发生影响.

根据定义立刻可得：

定理1　如果問答題"$A(x)$ 眞嗎？"是可以完全判定的，那么使 $A(x)$ 为眞的 x 及使 $A(x)$ 为假的 x 均各組成一个一般遞归集；如果它是可以半判定的，那么使 $A(x)$ 为眞的 x 組成一个半遞归集，而使 $A(x)$ 为假的 x 却不能組成一个半遞归集.

讀者試自行証之.

定理2　如果求作題："試就 y 解方程 $a(x, y)=0$"是可完全解决的，那么使該方程有解的 x 及使方程无解的 x 分別組成一个一般遞归集，而 $\underset{y}{\mathrm{rti}}\, a(x, y)$ 亦是 x 的一般遞归函数. 如果它可半解决，那么使方程有解的 x 組成一个半遞归集，$\underset{y}{\mathrm{rti}}\, a(x, y)$ 是一个半遞归函数，即以該半遞归集为定义域；而使方程无解的 x 却不能組成一个半遞归集.

定理3　問答題"$A(x)$ 眞嗎？"为可完全判定，当且仅当下两

問題:

$$“A(x)\text{ 眞嗎?}”\text{ 和 }“\overline{A}(x)\text{ 眞嗎?}”$$

均为可半判定,亦卽“$A(x)$眞嗎?”为既可半判定又可半負判定.

証明 必要性. 如 $A(x)$为一般遞归謂詞,則 $A(x)$及 $\overline{A}(x)$皆为一般遞归謂詞,从而皆为半遞归謂詞.

充分性. 如 $A(x)$ 及 $\overline{A}(x)$ 皆为半遞归謂詞, 依上章知 $A(x)$ 及 $\overline{A}(x)$皆为一般遞归謂詞. 定理得証.

就求作題言,对于本定理沒有相应的定理.

关于可半判定(可半解决)的情形,还可从另一个观点来处理. 我們知道,当 $A(x)$可半判定时,使 $A(x)$为眞的 x 所組成的集便是半遞归集. 但由上討論可知,半遞归集也就是遞归枚举集,亦卽是某个原始遞归函数的値域. 旣然半遞归集的討論可以不借助于半遞归函数,同样,可半判定(可半解决)的大量問題的定义也可以不借助于半遞归函数,因此又有下列定理.

定理 4 一个非永假的大量問答題“$A(x)$眞嗎?”为可半判定,当且仅当存在一个原始遞归函数 $f(n)$, 使得

$$A(x)\text{眞, 当且仅当有 } n, \text{ 使 } x=f(n).$$

定理 5 一个大量求作題:“就 y 而求解方程 $A(x, y)=0$”如果不是永无答案, 則它可半解决当且仅当存在一个原始遞归函数 $f(n)$, 使得 $A(x, y)=0$ 有解而其解为 $y=b$ 当且仅当有 n, 使得 $x=Lf(n)$, 并且 $Kf(n)=b$.

証明并不太难, 讀者可自己写出(利用“半遞归集恒可由原始遞归函数生成”的性质).

显然,上两定理中的“原始遞归”字样亦可換为“一般遞归”字样,所得結果仍是成立的.

习 題

1. 将本节中未証的定理加以詳細証明.

2. 試証：一个大量問答題(永假或否)“$A(x)$ 眞嗎？”为可半判定，当且仅当存在一个原始遞归函数 $f(n)$，使得

$$A(x)\text{眞，当且仅当有 } n\text{，使得 } Sx=f(n).$$

3. 試証：一个大量求作題“就 y 而求解方程 $A(x,y)=0$”为可半解决，当且仅当存在一个原始遞归函数 $f(n)$，使得

$$A(x,y)=0 \text{ 有解，且其解为 } y=b\text{，当且仅当有 } n\text{，使得}$$
$$Sx=Lf(n)\text{，而 } Kf(n)=b.$$

§3 基本的不能判定問題

以上虽对可判定性討論了許多，但仍有一个根本問題未曾解决：可完全判定的、可半判定的、可半負判定的、完全不可判定的問題到底是否存在？

可完全判定的謂詞显然有的，因为前面已經遇到了很多一般遞归謂詞，可半判定但不能完全判定的謂詞也曾在上文遇到过．但是，在这里有加以重新列举的必要．

任意一个 r 元半遞归函数均可表成 $K\ \underset{y}{\text{rti}}\ B(m,x_1,\cdots,x_r,y)$ 形，下面将把 $\exists y[B(m,x_1,\cdots,x_r,y)=0]$ 表为 $A(n,x_1,\cdots,x_r)$，它便是 r 元半遞归謂詞的枚举謂詞．

定理 1 設 $A(n,x_1,\cdots,x_r)$ 为 r 元半遞归謂詞的枚举謂詞，那末 $A(t,t,\cdots,t)$（作为一元函数說来）便是半遞归謂詞，但非一般遞归謂詞，而 $\overline{A}(t,t,\cdots,t)$ 甚至于不是半遞归謂詞．故得：

“$A(t,t,\cdots,t)$ 眞嗎？”可半判定，但不能半負判定，从而更不能完全判定．

讀者自己作出其証明．

在下面恒設 $A(n,x_1,\cdots,x_r)$ 为 r 元半遞归謂詞的枚举謂詞，并設 $a(n,x_1,\cdots,x_r)$ 为其肯定性半特征函数．

定理 2 “$a(x_1,\cdots,x_r)$ 有定义嗎？”可半判定，但不能半負判定，从而更不能完全判定．

証明 注意到謂詞“$a(x_1,\cdots,x_r)$ 有定义嗎？”恰是謂詞

$A(x, \cdots, x)$本身(注意肯定性半特征函数的性质).

定理 3 "$a(x, \cdots, x) \dot{-} a(x, \cdots, x)=0$ 嗎?" 可半判定,但不能半負判定,从而更不能完全判定.

証明 因 $a(x, \cdots, x) \dot{-} a(x, \cdots, x)=0$ 成立当且仅当 $a(x, \cdots, x)$有定义,故本定理实即上定理的另一种叙述.

定理 4 "$\forall x\, A(n, x, \cdots, x)$ 眞嗎?" 不能半判定,也不能半負判定,从而完全不能判定.

注意:本定理与前述几条定理有一个很大区别,即"肯定"、"否定"双方都是不能半判定的.

証明 后半部分(即不能半負判定部分)的証明很难,这里从略. 現証前半部分.

設将 $A(n, x, \cdots, x)$(它为半递归謂詞)仍表为 $\exists y[B(n,x,y)=0]$,这里 B 为初基函数,則 $\forall x\, A(n, x)$便表为 $\forall x \exists y[B(n,x,y)=0]$. 如果它可半判定,亦即如果它为半递归謂詞,那么使它为"眞"的 n 必組成半递归集 Δ,因而必可由某个原始递归函数 $e(m)$ 生成,即 n 使 $\forall x\, A(n, x)$ 眞,当且仅当有一个自然数 m,使得 $n=e(m)$,故

$$\forall x \exists y[B(e(m), x, y)=0] \quad \text{对一切 } m \text{ 均眞.}$$

在特例,

$$\exists y[B(e(m), m, y)=0] \quad \text{对一切 } m \text{ 均眞,}$$

从而 $\underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(e(m), m, y)$ 必为 m 的一般递归函数(因它对每个 m 均有定义),故 $1+K\, \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(e(m), m, y)$ 亦为 m 的一般递归函数. 由于每个半递归函数均可表成 $K\, \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(n, x, y)$ 之形,故必有一数 q,使得对一切 m 有

$$1+K\, \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(e(m), m, y)=K\, \underset{y}{\mathrm{rti}}\, B(q, m, y). \qquad (*)$$

既然第 q 号的半递归函数是一般递归函数,应有

$$\forall x \exists y[B(q, x, y)=0] \text{ 为眞,}$$

即应有

$$\forall x\, A(q, x, \cdots, x) \text{ 为眞,}$$

故 q 应属于上述的半递归集 Δ 中. 由上可知,应有一数 v, 使

$$q=e(v),$$

代入(*)式得: 对一切 m, 均有

$$1+K\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\,B(e(m), m, y)=K\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\,B(e(v), m, y).$$

今代 m 以 v, 得

$$1+K\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\,B(e(v), v, y)=K\,\underset{y}{\mathrm{rti}}\,B(e(v), v, y).$$

注意到左右两端处处有定义,便得出一矛盾. 由这矛盾卽可推知 $\forall x\, A(n, x, \cdots, x)$不能半判定. 定理得証.

把上述各定理的内容含意略作解釋:

$A(n, x_1, \cdots, x_r)$眞便表示$\exists y[B(n, x_1, \cdots, x_r, y)=0]$为眞,亦卽第 n 号半递归函数应在$(x_1, \cdots, x_r)$处有意义. 若把"n"作为变元, 那便是要求用一个共通的方法来判定第 n 号半递归函数在$(x_1, \cdots, x_r)$处有无定义. 定理1說的是,甚至于对于"第 x 号半递归函数在$(x, \cdots, x)$处有定义嗎?"这个問題也只能半判定而不能半負判定. 定理2和定理3所說的都是同样的內容, 不过表达方式不同而已.

又, $\forall x\, A(n, x, \cdots, x)$ 意指 $\forall x \exists y[B(n, x, \cdots, x, y)=0]$, 亦卽意指: 第 n 号半递归函数在一切$(x, \cdots, x)$处(卽当各变元皆相等时)有定义. 今把 n 作为变元而看成一大量問題, 那便等于說, 要用一个共通方法判定第 n 号半递归函数是否当一切变元皆相等时恒有定义. 定理4指出, 这个問題(及其反面問題)連半判定也不可能,卽是完全不能判定的.

同法也可証明:

定理5 "$\forall x_1 \cdots \forall x_r B(n, x_1, \cdots, x_r)$眞嗎?" 既不能半判定,也不能半負判定,从而完全不能判定.

讀者試自行証明之.

这問題实卽要求: 用一个共通方法来判定第 n 号半递归函数

是(不是)一般递归函数. 本定理表明,这問題是完全不能判定的.

这样便找出了好些謂詞:有些是可完全判定的,有些是可半判定但不可半負判定的,有些是可半負判定但不可半判定的,有些則是完全不可判定的.

习　　題

1. 将本节未証之定理加以詳細証明.

2. 試将各节定理与以前各章中类似定理作比較,并比較本节所使用的証明方法与以前各章中所使用的方法之間的异同.

§4 半递归函数間的关系和性质之不可完全判定性

本节将討論半递归函数的性质的判定問題,换言之,将判定下列問題:

"(半递归)函数关系 f 具性质 P 嗎?".

这里作为变元(即参数)的不是跟随 f 之后的变元 $x_1, \cdots, x_r$, 而是半递归函数关系 f 本身. 我們知道,在整个递归函数論中,并沒有把"函数"作为变元来討論. 不过,既然有了枚举函数,便可用一函数在該枚举函数之下的編号来代替該函数关系本身, 編号既是自然数,它就可以当作变元了.

因此引入下列定义.

定义 如果有一函数 v 及一枚举 B, 使得:

函数关系 f 具性质 P 　当且仅当

在枚举 B 下 f 的編号 n 滿足 $v(n)=0$,

則說 v 是在枚举 B 之下、謂詞"f 具性质 P"的**特征函数**(当 v 处处有定义时),或**半特征函数**(当 v 只是部分函数时).

如 v 处处有定义, 則 $N^2(v(n))$ 便是通常意义下的特征函数. 如 v 只是部分函数, 則当 f 不具性质 P 时, $v(n)$ 可能有定义而值不为 0, 但亦可能沒有定义.

如果“f具性质P嗎?”的半特征函数v是一般递归函数,则說在枚举B之下“f具性质P嗎?”这个大量問題是**可以完全判定的**;如果v是半递归函数,則說在枚举B之下它是**可半判定的**;如果v是非半递归函数,則說在枚举B之下它是不可判定的.

照这样定义,显然

“f具性质P嗎?”这个問題能在枚举B之下可(半)判定

这事在很大程度上取决于所使用的枚举.如果对所使用的枚举不作限制,对于任給性质P,总能找出枚举B,使得“f具性质P”这問題在枚举B之下可(半)判定.因为只須选取下列枚举便成了:如f具性质P,則对f編以偶数号,如f不具性质P,則对f編以奇数号;显然,f具性质P或否,立刻由其編号的奇偶而知.

但是,这个枚举的作出要依賴于預先能判定f是否具性质P,因此这个枚举对判定“f是否具性质P?”的問題是毫无用处的.此外,这个枚举B未必可(半)能行計算(如果f具性质P不是可(半)判定的話).

因此提出要求:所使用的枚举B的作出要不依賴于“f具性质P或否”的判定;同时枚举至少要可(半)能行計算,这是今后所作的要求.

定理1 如果函数集Δ具有主要自身枚举A,則对任一性质P說来,如果“f具性质P嗎?”这問題在枚举A之下可(半)判定,則它在任一自身枚举之下也可(半)判定.换言之,在自身枚举中,主要自身枚举是最“頑强”的枚举(最难在它之下(半)判定).

証明 設f在枚举A之下的編号为n_A.既然在枚举A之下“f具性质P嗎?”可(半)判定,故有一般(半)递归函数v_A,使得

$$f\text{ 具性质 }P\quad\text{当且仅当}\quad v_A(n_A)=0.$$

任意取一个自身枚举B,設B借助于φ而化归为A,卽有$n_A=\varphi(n_B)$.故得

$$f\text{ 具性质 }P\quad\text{当且仅当}\quad v_A(\varphi(n_B))=0,$$

由于 $v_A(\varphi(x))$ 随 $v_A(x)$ 而为半递归函数或一般递归函数，故知在枚举 B 之下，"f 具性质 P 嗎?" 也可(半)判定. 定理得証.

推論 对于任一性质 P 及任意两个主要自身枚举 A、B，"f 具性质 P 嗎?" 在枚举 A 之下可(半)判定，当且仅当它在枚举 B 之下可(半)判定.

因此，在主要自身枚举之下的可(半)判定性是很值得研究的.

定义 如果函数集中每个函数 f 均具性质 P，則說性质 P 是該集函数所**必有的**；如果函数集中每个函数皆不具性质 P，則說 P 是該集所**必无的**. 必有的与必无的性质都叫做該集的**平凡性质**. 非必有亦非必无的性质称为該集的**非平凡性质**. 对于該集的任一非平凡性质 P，在該集中必有一些函数具性质 P，也必有另一些函数不具性质 P.

定理 2 如果函数集 Δ (例如半递归函数集)含有本原函数、处处无定义的函数，又含有主要自身枚举，則它的任何一个非平凡性质 P，在任何一个主要自身枚举之下，其特征函数都不可能是一般递归的. 換言之，它的任何一个非平凡性质在任何一个主要枚举之下都是不能完全判定的.

証明 玆用反証法証之. 設有一个非平凡性质 P，有一个主要自身枚举 $A(n, x_1, \cdots, x_r)$，使得在主要自身枚举 A 之下，謂詞 "Δ 中的函数 f 具性质 P 嗎?" 这問題可以完全判定；亦即有一个一般递归函数 $p(n)$，滿足下列条件(其中 n_f 为在枚举 A 之下 f 的編号)：

$$f \text{ 具性质 } P \quad \text{当且仅当} \quad p(n_f)=0;$$

$$f \text{ 不具性质 } P \quad \text{当且仅当} \quad p(n_f)=1.$$

因为 P 为非平凡性质，故恒可在 Δ 中找出一个函数 $g(x_1, \cdots, x_r)$，它具性质 P 或否恰与处处无定义的函数 $w(x_1, \cdots, x_r)$ 具性质 P 或否的情况相反(即：如 w 具性质 P，則 g 不具性质 P；如 w 不具性质 P，則 g 具性质 P). Δ 中显然有一个非一般递归

函数 $\psi(n)$，它不能补全为一般递归函数(否則 Δ 中不可能有自身枚举)，今定义一 $r+1$ 元函数如下:

$$h(n, x_1, \cdots, x_r)=SO\psi(n)\cdot g(x_1, \cdots, x_r).$$

显然，它在函数集 Δ 中，且有

$$h(n, x_1, \cdots, x_r)=\begin{cases} g(x_1, \cdots, x_r), & \text{当 } \psi(n) \text{ 有定义时}, \\ w(x_1, \cdots, x_r), & \text{当 } \psi(n) \text{ 无定义时}. \end{cases}$$

由于 A 是主要枚举，根据以前的定理，应有一般递归函数 φ，使得

$$A(\varphi(n), x_1, \cdots, x_r)=h(n, x_1, \cdots, x_r).$$

当 n 变化时有两种情形: 如 $\psi(n)$ 有定义，則 $h(n, x_1, \cdots, x_r)=g$，故知 g 在 A 下的編号为 $\varphi(n)$; 如 $\psi(n)$ 无定义，則 $h(n, x_1, \cdots, x_r)=w(x_1, \cdots, x_r)$，故这时 w 的編号为 $\varphi(n)$. 但須注意，g 具性质 P 与否恰与 w 具性质 P 与否的情形相反，不妨設 g 具性质 P 而 w 不具性质 P (对另一情况可同法討論)，这时有

$$p(\varphi(n))=\begin{cases} 0, & \text{当 } \varphi(n) \text{ 为 } g \text{ 的編号，即当 } \psi(n) \text{ 有定义时}, \\ 1, & \text{当 } \varphi(n) \text{ 为 } w \text{ 的編号，即当 } \psi(n) \text{ 无定义时}. \end{cases}$$

因此，$p(\varphi(n))$ 为謂詞"$\psi(n)$ 有定义"的特征函数，而 $p(\varphi(n))$ 又为一般递归函数，故 $\psi(n)$ 可补全为一般递归函数，这与我們当初选取 $\psi(n)$ 的条件矛盾，于是定理得証.

本定理的应用范圍是非常广的，因为非平凡性质是举不胜举的. 下面試列出一些:

定理 3 任給一个半递归函数 $b(x_1, \cdots, x_r)$，則"半递归函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 恒等于 $b(x_1, \cdots, x_r)$ 嗎?"不能完全判定.

証明 因有些函数恒等于 $b(x_1, \cdots, x_r)$，有些則否.

定理 4 任給一組值 $a_1, \cdots, a_r, c$，則"半递归函数关系 f 在 $(a_1, \cdots, a_r)$ 处的值为 c 嗎?"不能完全判定.

証明 因有些函数关系在 $(a_1, \cdots, a_r)$ 的值为 c，有些函数关系則否. 例如 $S^cO(x_1, \cdots, x_r)$ 的值为 c，而 $S^{c+1}O(x_1, \cdots, x_r)$ 的

值非 c.

定理 5 任給一主要自身枚举 A, 則"在枚举 A 之下,編号为 m_1 与 m_2 的两个半递归函数是相同的函数嗎?"(本問題的参数为 m_1、m_2)不能完全判定.

証明 由定理 3 知,两函数相等与否不能完全判定,故在任何主要自身枚举之下, 不可能对每一函数(相等的看作一个函数)只給一个編号,从而必有某些不同編号是指同一函数的,又有某些編号是指不同函数的.

此外的例子不再一一罗列了, 讀者可以任意作出无限多个例子来,从而可以看到定理 2 的作用.

但是, 必須注意: 以上所討論的是半递归函数集(它有自身枚举)的情况. 对一般递归函数集說来,即使仍利用半递归函数集的主要自身枚举,則未必成立. 例如

定理 6 任給一組值 $a_1, \cdots, a_r, c$, 則"一般递归函数 f 在$(a_1, \cdots, a_r)$处的值为 c 嗎?" 是可以完全判定的.

証明 同前,命 f 在 A 下的編号为 n, 則

$$N(A(n, a_1, \cdots, a_r) \dot{-} c) \quad (\text{記为 } p(n))$$

显然便是完全判定定理中的大量問題的函数. 因所討論的函数是一般递归的,故在所討論的問題中, 任給 $a_1, \cdots, a_r, c$ 后, 該編号 n 均使 $p(n)$ 有值, 故 $p(n)$ 必为一般递归函数而該大量問題便可以完全判定. 定理得証.

但是更値得注意的是, 对一般递归函数, 仍然有下述的定理(这时只能就一些特殊的性质来討論,不能一般地就"非平凡性质"来討論).

定理 7 任給一个一般递归函数 $b(x_1, \cdots, x_r)$, 則"一般递归函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$恒等于 $b(x_1, \cdots, x_r)$嗎?" 不能完全判定.

証明 可先用配对函数, 把問題化为一元函数的問題. 因 $f(x_1, \cdots, x_r)$等于 $b(x_1, \cdots, x_r)$与否,全視 $f(LK^{r-1}, \cdots, LK, L)$

等于 $b(LK^{r-1}, \cdots, LK, L)$ 与否而定. 因此,为簡便起見,下面就 $r=1$ 来討論,并把"$f(x_1)$"、"$b(x_1)$"省写为"$f(x)$"、"$b(x)$".

假定該問題可以完全判定, 并由一般递归函数 $p(n)$ 来判定, 即 $f(x)$ 恒等于 $b(x)$ 当且仅当 $p(n_f)=0$.

取一个半递归但非一般递归的数集 R. 因 R 为半递归,故必由某个一般递归函数 $e(n)$ 所生成,即有

$$n \text{ 属于 } R \quad \text{当且仅当} \quad \text{有 } m \text{ 使 } e(m)=n.$$

今定义 $g(n, x)$ 如下:

$$g(n, x)=\begin{cases} b(x)+1, & \text{当 } \underset{t\to x}{\exists}[e(t)=n] \text{ 时}, \\ b(x), & \text{此外}. \end{cases}$$

因 $b(x)$ 为一般递归函数, 而 $\underset{t\to x}{\exists}[e(t)=n]$ 又为一般递归謂詞, 故知 $g(n, x)$ 为一般递归函数. 由于 A 是主要枚举,故必有一般递归函数 $\varphi(n)$, 使得

$$A(\varphi(n), x)=g(n, x).$$

下面来討論当 n 变化时, $q(n)=N(p(\varphi(n)))$ 所取之值.

如果 n 不属于 R, 則 $e(t)=n$ 是永不可能的,故依 $g(n, x)$ 的定义知 $g(n, x)=b(x)$, 即 $A(\varphi(n), x)=b(x)$. 故知在枚举 A 之下, $\varphi(n)$ 为 $b(x)$ 的編号. 故函数 $p(n)$ 应满足

$$p(\varphi(n))=0,$$

从而

$$q(n)=N(p(\varphi(n)))=1.$$

换言之,如 n 不属于 R, 則 $q(n)=1$.

如果 n 属于 R, 則必有 t, 使得 $e(t)=n$. 命其最小的 t 根为 t_0. 显然, 当 $x\geqslant t_0$ 时, $\underset{t\to x}{\exists}[e(t)=n]$ 是成立的, 故 $x\geqslant t_0$ 时, $g(n, x)=b(x)+1$. 由于 $b(x)$ 是一般递归函数,是处处有定义的, 故知 $x\geqslant t_0$ 时 $g(n, x)\neq b(x)$, 亦即函数 $g(n, x)$ 与 $b(x)$ 不同. 故 $A(\varphi(n), x)\neq b(x)$, 即在枚举 A 之下, $\varphi(n)$ 是异于 $b(x)$ 的函数的編号. 故函数 $p(n)$ 应满足

$$p(\varphi(n))=1.$$

从而

$$q(n)=N(p(\varphi(n)))=0.$$

换言之,如 n 属于 R, 則 $q(n)=0$.

因此, $q(n)$便是数集 R 的特征函数. 由于 p 及 φ 均为一般递归函数, 故 R 便是一般递归集. 这与当初选取 R 的条件相矛盾,从而定理得証.

注意: 尽管任一个一般递归函数在任一变元处之值可以完全判定, 但两个一般递归函数相等与否却不能完全判定. 如取 $b(x_1, \cdots, x_r)$为零函数,还可推得

推論 "一般递归函数 f 恒等于 0 嗎?" 不能完全判定.

仿上面的討論,又可推得

定理 8 任給一个主要枚举 A, 則"在枚举 A 之下,編号为 m_1 与 m_2 的两个一般递归函数是相同的函数嗎?" 不能完全判定.

定理 8 与上述定理不同之处在于:即使知道 m_1、m_2 是一般递归函数的編号,仍然无助于完全判定它們是否为同一函数的編号.

这便是关于应用递归函数来对递归函数集作判定的主要結論.

此外, 还可应用于形式系統, 可应用于数理邏輯方面, 对此这里不贅述了.

习 题

1. 根据定理 2, 試再列举出一些不能完全判定的性质.

2. 第六章 §3 中所提到的一些不可判定性,是否是本节某些定理的特例?